Matematiska institutionen
Optimeringslära

TENTAMEN

TAOP33/TEN 2
KOMBINATORISK OPTIMERING GRUNDKURS

Datum:	24 april 2014
Tid:	8.00-13.00
Hjälpmedel:	Miniräknare
	Kurslitteratur: Kaj Holmberg: *Optimering*
	Anteckningar i boken får förekomma.
Antal uppgifter:	6
Antal sidor:	5
	Uppgifterna är *inte* ordnade efter svårighetsgrad.
	Totalt antal poäng är 40. För godkänt krävs 16 poäng.
Examinator:	Kaj Holmberg
Jourhavande lärare:	Kaj Holmberg, tel 013-282867

Resultat meddelas per e-post

Tentamensinstruktioner

När Du löser uppgifterna

Redovisa dina beräkningar och din lösningsmetodik noga.
Motivera alla påståenden du gör.
Använd de standardmetoder som ingår i kursen.

Skriv endast på ena sidan av lösningsbladen. Använd inte rödpenna.
Behandla endast en huvuduppgift på varje blad.

Vid skrivningens slut

Sortera dina lösningsblad i uppgiftsordning.
Markera på omslaget vilka uppgifter du behandlat.
Kontrollräkna antalet inlämnade blad och fyll i antalet på omslaget.

Uppgift 1

Studenten Didrik skall lösa följande heltalsproblem.

$$
\begin{array}{llrcrcrcl}
\max & z = & 5x_1 & + & 6x_2 & + & 3x_3 & & \\
\text{då} & & 2x_1 & + & 3x_2 & + & x_3 & \leq & 4 \\
 & & 3x_1 & + & 2x_2 & + & 2x_3 & \leq & 4 \\
 & & x_1 & + & 2x_2 & + & 2x_3 & \leq & 3 \\
 & & x_1 & , & x_2 & , & x_3 & \in & \{0,1\}
\end{array}
$$

Han vet inte riktigt hur man löser ett heltalsproblem, men han har hittat en kod som löser LP-problem på nätet. LP-relaxationen av problemet ovan har lösningen $x_1 = 0.5, x_2 = 0.875, x_3 = 0.375$ med $z = 8.875$. Till Didriks besvikelse får ingen variabel ett heltaligt värde.

Han löser då, för varje variabel, det LP-problem som fås då variabeln fixeras till ett respektive noll, och får följande resultat.

Fixering $x_1 = 1$ ger $x_2 = 0.5, x_3 = 0$ med $z = 8$.
Fixering $x_2 = 1$ ger $x_1 = 0.3333, x_3 = 0.333$ med $z = 8.6667$.
Fixering $x_3 = 1$ ger $x_1 = 0.5, x_2 = 0.25$ med $z = 7$.
Fixering $x_1 = 0$ ger $x_2 = 1, x_3 = 0.5$ med $z = 7.5$.
Fixering $x_2 = 0$ ger $x_1 = 1, x_3 = 0.5$ med $z = 6.5$.
Fixering $x_3 = 0$ ger $x_1 = 0.8, x_2 = 0.8$ med $z = 8.8$.

Tyvärr är ingen av dessa lösningar heltalig, och nu vet Didrik inte vad han ska göra. Han vill nämligen inte räkna upp alla kombinationer av fixeringar, eftersom han har läst komplexitetsteori. Han har nu löst $O(n)$ LP-problem (där n är antalet variabler), och inser att antalet kombinationer är mycket större.

a) Hjälp Didrik och lös problemet med Land-Doig-Dakins metod. Använd Didriks resultat (så att han inte har jobbat i onödan). (2p)

b) Ta fram minimala övertäckningar för varje bivillkor. Kan man med hjälp av dessa på ett enkelt sätt lösa problemet? (2p)

Uppgift 2

Betrakta följande LP-problem.

$$
\begin{array}{llrcrcrcl}
\max & z = & 2x_1 & + & 4x_2 & + & x_3 & & \\
\text{då} & & x_1 & + & 2x_2 & + & 3x_3 & \leq & 4 \\
 & & x_1 & + & x_2 & + & 2x_3 & \leq & 3 \\
 & & x_1, & & x_2, & & x_3 & \geq & 0
\end{array}
$$

a) Gör en iteration med simplexmetoden. Ange lösningen. (Kalla denna lösning

A.) Motivera optimalitet. Hur ser man att optimallösningen inte är unik? (2p)

b) Finn ytterligare en optimal baslösning genom att fortsätta med simplexteknik. (Kalla denna lösning B.) (1p)

c) Antag att man själv har räknat ut lösning A, och att man får lösning B från en annan källa. Bevisa att lösning B är optimal (utan att använda simplexmetoden eller dualitet.) (1p)

d) Formulera LP-dualen till problemet ovan. Lös problemet grafiskt, och verifiera att komplementaritetsvillkoren är uppfyllda för både primallösning A och B. (3p)

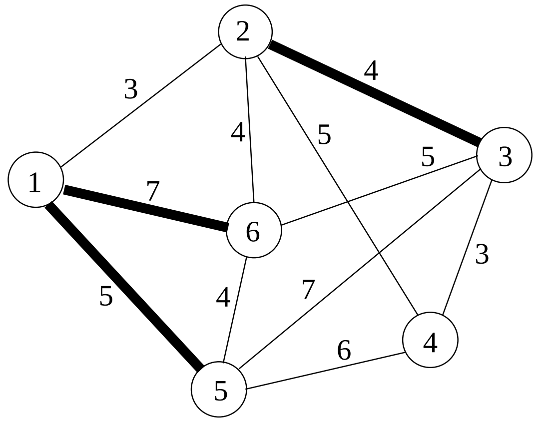
e) För vilka värden på b_1 (högerledet i första primala bivillkoret) är baslösningarna A respektive B optimala? Finn svaret grafiskt i dualen. Förklara speciellt skillnaderna mellan de två olika fallen A och B. (3p)

Uppgift 3

Betrakta en oriktad graf $G = (N, B)$ med bågkostnader c. Det kinesiska brevbärarproblemet handlar som bekant om att finna en tur i grafen som använder varje båge i B minst en gång och har minimal kostnad. En utvidgning av detta problem är *lantbrevbärarproblemet*, där endast en given delmängd, B', av bågarna B *måste* ingå. Resterande bågar, $B \setminus B'$, får användas om det behövs. Målet är fortfarande att finna en rundtur (som startar och slutar i samma nod) som har minimal kostnad. Bågar får användas flera gånger om så önskas.

a) Om B' bildar en sammanhängande graf, så är lantbrevbärarproblemet polynomiskt lösbart. Är problemet polynomiskt lösbart eller NP-svårt om B' inte bildar en sammanhängande graf? Motivera! (Ledning: Antalet separata sammanhängande delar kan antas växa då problemstorleken växer.) (1p)

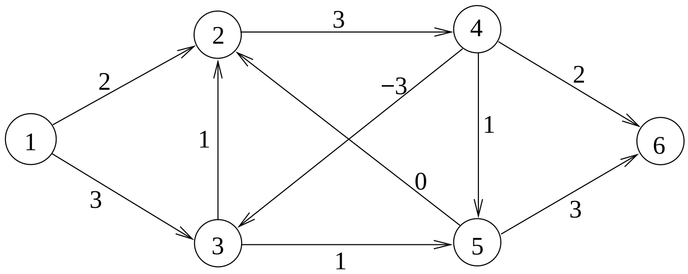
b) Föreslå en heuristik för lantbrevbärarproblemet. (Helst baserad på i kursen ingående heuristiker.) Applicera heuristiken på nedanstående exempel. Bågar som måste ingå, B', är markerade med tjockare streck. (3p)



c) Ange en enkel algoritm som beräknar en undre gräns för det optimala målfunktionsvärdet. Applicera den på exemplet i uppgift b. (Gränsen måste vara bättre än $\sum_{(i,j)\in B'} c_{ij}$ för att ge poäng.) Använd den erhållna undre gränsen för att avgöra hur långt från optimum lösningen i uppgift c maximalt kan vara. (1p)

Uppgift 4

Betrakta nedanstående riktade graf med bågkostnader.



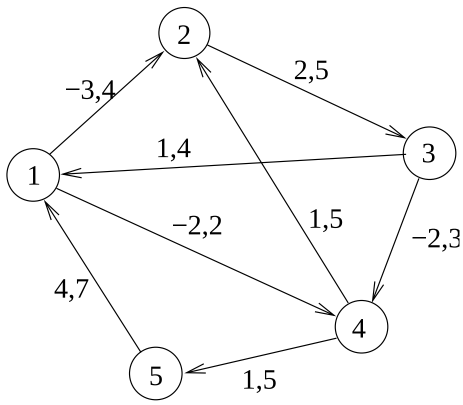
a) Använd Dijkstras metod för att försöka finna en billigaste väg från nod 1 till nod 6. (2p)

b) Kontrollera resultatet av uppgift a med Fords metod. Starta med de nodmärkningar som erhölls i uppgift a och verifiera optimalitet eller finn ny optimallösning. (2p)

c) Antag att $y^{(1)}$ och $y^{(2)}$ är två olika optimala *duala* lösningar till billigaste väg-problemet (dvs. nodpriser) för samma primala otimallösning. Är följande lösningar optimala? Motivera.
I: $y^{(1)} + y^{(2)}$. II: $(y^{(1)} + y^{(2)})/2$. III: $ky^{(1)}$. IV: $k + y^{(2)}$. (2p)

Uppgift 5

Betrakta nedanstående nätverk med bågkostnader och kapaciteter (övre gränser). Alla noder är mellannoder och alla bågar har undre gräns noll för flödet.



a) Bevisa att det är billigast att inte skicka något. (Ledning: Bågarna (1,2), (2,3), (3,4) och (4,5) kan användas som startbas.) (2p)

b) Ändra bågkostnad för båge (3,1) från 1 till 0. Finn optimalt minkostnadsflöde. (2p)

c) Finn maxflöde från nod 1 till nod 3 i ovanstående graf. Ange minsnitt. (3p)

Uppgift 6

Ibland kan man hamna i följande lite konstiga situation. Man har löst ett givet optimeringsproblem och funnit en optimallösning. Därefter har man slarvat bort vissa indata till problem. Man vill nu försöka återskapa den förlorade informationen med hjälp av den kända optimallösningen. Ibland går det bra, ibland kan man bara få fram gränser för de okända koefficienterna och ibland går det inte alls att göra detta på ett enkelt sätt.

Beskriv för samtliga nedanstående fall hur man kan göra.

a) Vi har en billigaste väg (inkluderande nodpriser och förgångare för alla noder), men glömt bågkostnaden för vissa bågar som inte ingår i billigaste vägen. (1p)

b) Vi har ett optimalt minkostnadsflöde (inkluderande nodpriser), men glömt vissa bågkostnader. (2p)

c) Vi har en optimal handelsresandetur, men glömt bågkostnaden för vissa bågar som inte ingår i handelsresandeturen. (1p)

d) Vi har en optimal lösning till ett LP-problem (inklusive duallösningen), men glömt målfunktionskoefficienten för vissa variabler som är lika med noll i optimallösningen. (2p)

e) Vi har ett billigaste uppspännande träd, men glömt bågkostnaden för vissa bågar som inte ingår i det billigaste uppspännande trädet. (2p)