Matematiska institutionen
Optimeringslära

TENTAMEN

TAOP33/TEN 2
KOMBINATORISK OPTIMERING GRUNDKURS

Datum:	16 januari 2015
Tid:	8.00-13.00
Hjälpmedel:	Miniräknare
	Kurslitteratur: Kaj Holmberg: *Optimering*
	Anteckningar i boken får förekomma.
Antal uppgifter:	7
Antal sidor:	5
	Uppgifterna är *inte* ordnade efter svårighetsgrad.
	Totalt antal poäng är 40. För godkänt krävs 16 poäng.
Examinator:	Kaj Holmberg
Jourhavande lärare:	Kaj Holmberg, tel 013-282867

Resultat meddelas per e-post

Tentamensinstruktioner

När Du löser uppgifterna

Redovisa dina beräkningar och din lösningsmetodik noga.
Motivera alla påståenden du gör.
Använd de standardmetoder som ingår i kursen.

Skriv endast på ena sidan av lösningsbladen. Använd inte rödpenna.
Behandla endast en huvuduppgift på varje blad.

Vid skrivningens slut

Sortera dina lösningsblad i uppgiftsordning.
Markera på omslaget vilka uppgifter du behandlat.
Kontrollräkna antalet inlämnade blad och fyll i antalet på omslaget.

Uppgift 1

Firma PrimaProdskij ställer upp följande modell för att bestämma sin produktion nästa år. x_j är antalet ton som produceras av produkt j och de två bivillkoren avser begränsad tillgång av två speficika råvaror. Målfunktionen anger vinst, och ska maximeras. Som synes interagerar de olika produkterna på ett komplicerat sätt, och PrimaProdskij har svårt att bestämma vilken produktion som är den bästa.

$$
\begin{array}{llrcrcrcrcll}
\max & z = & 3x_1 & - & 2x_2 & - & 3x_3 & + & 2x_4 & & & \\
\text{då} & & x_1 & - & 2x_2 & - & x_3 & + & 2x_4 & \leq & 7 & \quad (1) \\
& & 2x_1 & + & 2x_2 & + & 2x_3 & - & 2x_4 & \leq & 8 & \quad (2) \\
& & x_1, & & x_2, & & x_3, & & x_4 & \geq & 0 &
\end{array}
$$

a) Hjälp PrimaProdskij och lös problemet med simplexmetoden. Starta i origo. Ange optimallösning samt vilka råvaror som är begränsande. (2p)

b) PrimaProdskijs ekonomiansvarige Piotr kommer på att målfunktionen anger kostnad, inte vinst som man först trodde. Ändra problemet ovan från max till min. Lös min-problemet med simplexmetoden. Starta i origo. Ange optimallösning samt vilka råvaror som är begränsande. (2p)

c) Formulera LP-dualen till max-problemet ovan. Lös problemet grafiskt. (Ledning: Duallösningen kan även läsas ut ur optimaltablån i uppgift a.) (2p)

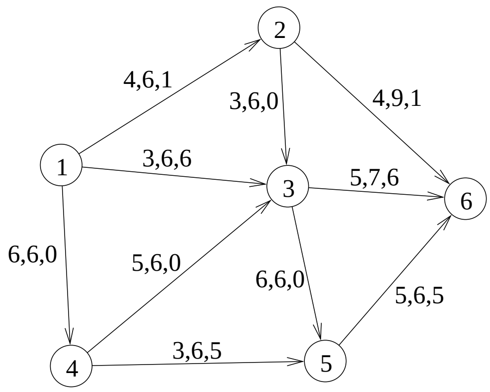
d) Formulera LP-dualen till min-problemet ovan. Lös problemet grafiskt. (Ledning: Duallösningen kan även läsas ut ur optimaltablån i uppgift b.) (2p)

e) Utgå från optimaltablån i uppgift a. Hur mycket skulle det optimala målfunktionsvärdet ändras om man hade en enhet mer av råvara 1? Svara på samma fråga för lösningen i uppgift b. (2p)

f) En ny möjlig produkt har bivillkorskoefficienterna 2 och 1 samt målfunktionskoefficienten 3. Skulle denna produkt förbättra resultatet i uppgift a? Skulle den förbättra resultatet i uppgift b? (Svara m.h.a. reducerad kostnad.) (2p)

Uppgift 2

PrimaProdskij anlitar firma AutoFlot för att utföra transporter. Följande nätverk anger möjliga transportvägar. I nod 6 finns ett behov av 12 pallar, och just nu har man 7 pallar i nod 1 och 5 pallar i nod 4. På bågarna anges kostnad per pall, en övre gräns för hur mycket som kan skickas den vägen samt hur mycket AutoFlot skickade förra gången. Man vill minimera kostnaderna för transporterna.



a) AutoFlot tycker att det vore bekvämt att göra transporterna på samma sätt som förra gången. Är det optimalt? Använd simplexmetoden för nätverk för att besvara den frågan. (2p)

b) Kostnaden på båge (1,3) ökar till 4 pga ett vägarbete. Starta med lösningen i uppgift a och finn ett nytt minkostnadsflöde med simplexteknik. Ange hur mycket AutoFlot skulle förlora om de fortsatte med den gamla planen. (2p)

c) Vägarbetet på båge (1,3) blir inte av, så situationen i uppgift a kvarstår. Man funderar på en förbättring av båge (1,4) så att kostnaden på bågen sänks. Vid vilken kostnadsminskning kommer AutoFlot att vilja använda båge (1,4) (om man fortfarande vill köra optimalt)? (1p)

d) Utgå från det givna flödet i uppgift a och finn maxflöde från nod 1 till nod 6. (Använd lämplig metod, och visa alla steg i metoden tydligt.) Ange minsnitt. (3p)

Uppgift 3

Betrakta följande heltalsproblem.

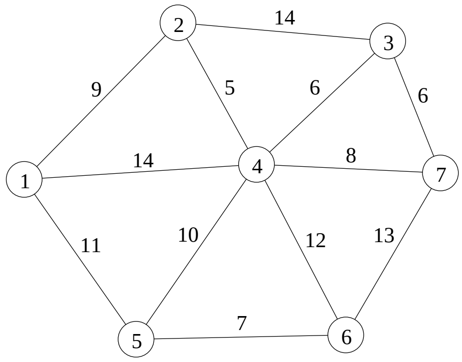
$$\begin{array}{llrcrcll}
\max & z = & 4x_1 & + & 4x_2 & & & \\
\text{då} & & 3x_1 & + & 5x_2 & \leq & 8 & \quad (1) \\
 & & 4x_1 & + & 3x_2 & \leq & 7 & \quad (2) \\
 & & x_1, & & x_2 & \geq & 0 &
\end{array}$$

a) Finn en optimallösning med Land-Doig-Dakins trädsökningsmetod. Tvådimensionella LP-problem får lösas grafiskt. (2p)

b) Antag att högerledet i bivillkor 2 ändras från 7 till 8. Använd lösningen i uppgift a samt valda delar av Land-Doig-Dakins metod för att lösa problemet. Ledning: Det tillåtna området ökas, så alla lösningar som var tillåtna är fortfarande det. (2p)

Uppgift 4

Betrakta följande oriktade nätverk med bågkostnader.



a) Finn med en heuristik en rundtur som besöker varje nod en gång och som är så kort som möjligt. Använd en relaxation av problemet för att få en optimistisk uppskattning att jämföra rundturen med, samt ange hur långt ifrån optimum lösningen är (i värsta fall). (2p)

b) Innehåller grafen en rundtur som genomgår varje båge exakt en gång? Motivera. (1p)

c) Innehåller grafen en rundtur som genomgår varje båge exakt två gånger? Motivera. (1p)

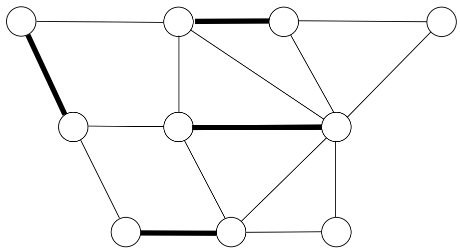
Uppgift 5

a) Ibland sitter en examinator och försöker hitta på lämpliga siffror till en uppgift på en tenta. Uppgiften ska inte vara för lätt och inte för svår. I detta fall handlar det om tillordningsproblemet, som ju löses med ungerska algoritmen. Ett tidigare försök med kostnaderna $c_{ij} = i+j$ slog inte så väl ut, eftersom det blev det lättaste möjliga fallet. Hur blir det med $c_{ij} = i * j$ (dvs. då kostnaden är produkten av radindex och kolumnindex)? Blir det ovanligt lätt, ovanligt svårt eller lagom? Finn svaret genom att lösa ett 4x4-exempel. Hur många iterationer kan man förvänta sig för en nxn-matris? (3p)

b) Kommer elementet med den lägsta kostnaden (vilket är position (1,1)) att ingå i optimallösningen? (1p)

Uppgift 6

Betrakta följande oriktade nätverk, med en matchning, angiven av tjockare bågar.



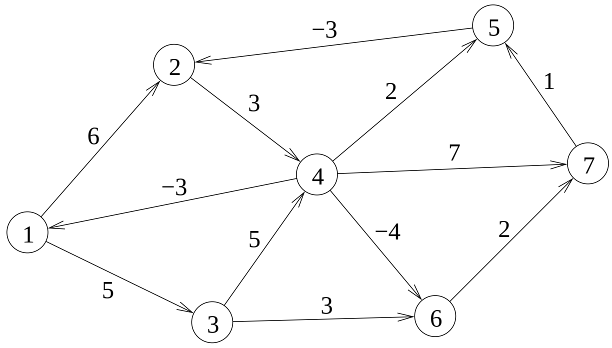
a) Målet är att finna en matchning med maximal kardinalitet. Utöka matchningen genom att iterativt finna alternerande/utökande väg, tills ingen förbättring kan ske. Är den resulterande matchningen maximal? (2p)

b) Ange övre och undre gränser på hur många färger som krävs för en minimal nodfärgning i grafen ovan. Motivera. (2p)

c) Ange övre och undre gränser på hur många färger som krävs för en minimal bågfärgning i grafen ovan. Motivera. (2p)

Uppgift 7

Betrakta nedanstående riktade graf med bågkostnader.



Målet är att finna billigaste väg från nod 1 till nod 7. Ange en duallösning som är tillåten och optimal till detta problem eller förklara varför det inte inte finns någon. (2p)