Matematiska institutionen
Optimeringslära

TENTAMEN

TAOP33/TEN 2
KOMBINATORISK OPTIMERING GRUNDKURS

Datum:	9 april 2015
Tid:	8.00-13.00
Hjälpmedel:	Miniräknare
	Kurslitteratur: Kaj Holmberg: *Optimering*
	Anteckningar i boken får förekomma.
Antal uppgifter:	7
Antal sidor:	5
	Uppgifterna är *inte* ordnade efter svårighetsgrad.
	Totalt antal poäng är 40. För godkänt krävs 16 poäng.
Examinator:	Kaj Holmberg
Jourhavande lärare:	Kaj Holmberg, tel 013-282867

Resultat meddelas per e-post

Tentamensinstruktioner

När Du löser uppgifterna

Redovisa dina beräkningar och din lösningsmetodik noga.
Motivera alla påståenden du gör.
Använd de standardmetoder som ingår i kursen.

Skriv endast på ena sidan av lösningsbladen. Använd inte rödpenna.
Behandla endast en huvuduppgift på varje blad.

Vid skrivningens slut

Sortera dina lösningsblad i uppgiftsordning.
Markera på omslaget vilka uppgifter du behandlat.
Kontrollräkna antalet inlämnade blad och fyll i antalet på omslaget.

Uppgift 1

Firma Gunnars Gaming ska göra några datorer av de grejor de har liggande. Det de har ont om är fläktar, 5 st, och minneskort, 7 st. Det finns tre olika modeller man kan göra, och man sätter upp följande LP-problem för att bestämma hur många man ska göra av varje sort, så att vinsten maximeras. (Man struntar i att lösningen skulle kunna bli icke heltalig.)

$$
\begin{array}{llrcrcrcll}
\max & z = & 4x_1 & + & 3x_2 & + & x_3 & & & \\
\text{då} & & 2x_1 & + & x_2 & + & x_3 & \leq & 5 & \quad (1) \\
& & 2x_1 & + & 2x_2 & + & x_3 & \leq & 7 & \quad (2) \\
& & x_1, & & x_2, & & x_3 & \geq & 0 &
\end{array}
$$

a) Hjälp Gunnars och lös problemet med simplexmetoden. Ange optimallösning. Blir det några fläktar eller minneskort över? (3p)

b) Formulera LP-dualen till problemet ovan. Lös problemet grafiskt. (Ledning: Duallösningen kan även läsas ut ur optimaltablån i uppgift a.) (2p)

c) Rita i figuren i uppgift b in de duala punkter som i varje iteration uppfyller komplementaritetsvillkoren med motsvarande primala baslösning. (2p)

d) Utgå från optimaltablån i uppgift a. Hur mycket skulle det optimala målfunktionsvärdet ändras om man hade en fläkt till? (1p)

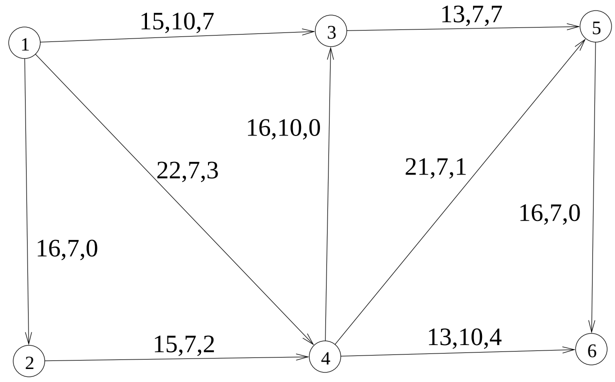
e) Man kan även göra en dator med 2 fläktar och ett minneskort (så man kan överklocka lite). Den får målfunktionskoefficienten (vinst) 2. Skulle denna produkt förbättra resultatet i uppgift a? (Svara m.h.a. reducerad kostnad.) (1p)

Uppgift 2

Gunnar inser att han inte vill ha en icke heltalig lösning, och bestämmer sig dessutom för att inte tillverka datorsort 3. Med andra ord, betrakta problemet i uppgift 1, där dock x_3 har fixerats till noll (dvs. tagits bort ur problemet) och variablerna måste anta heltaliga värden. Finn en optimallösning med Land-Doig-Dakins trädsökningsmetod. Tvådimensionella LP-problem får lösas grafiskt. (Ledning: Gå ner i $\geq$-grenen först.) Hur mycket lägre blir vinsten jämfört med LP-lösningen? (3p)

Uppgift 3

Gunnars Gaming har 10 färdiga datorer i sitt källare i Lambohov (nod 1) och 2 i sin lägenhet i Ryd (nod 2). Pelles PC (i nod 5) vill köpa 8 av dem och Dicks Datorer (i nod 6) vill köpa 4 av dem. Gunnars kompis Åke ska leverera datorerna, och vill då ha betalt enligt en linjär kostnadsfunktion. Följande nätverk anger möjliga transportvägar. På bågarna anges kostnad per dator, en övre gräns för hur mycket som kan skickas den vägen samt hur mycket Åke har tänkt sig skicka. Gunnar, som ska betala och därför vill minimera kostnaderna för transporterna, vill veta att det verkligen är det billigaste alternativet.



a) Är Åkes förslag optimalt (för Gunnar)? Använd simplexmetoden för nätverk för att besvara den frågan. (2p)

b) Kostnaden på båge (3,5) ökar till 33 p.g.a. ett vägarbete. Starta med lösningen i uppgift a och finn ett nytt minkostnadsflöde med simplexteknik. Ange hur mycket Gunnar skulle förlora om man använde Åkes gamla plan. (2p)

c) Vägarbetet i uppgift b blir inte av, så situationen i uppgift a kvarstår. Däremot finns det en möjlighet att kostnaden på bågen (1,2) sänks. Vid vilken kostnad kommer Gunnar att vilja att Åke använder båge (1,2)? (1p)

d) Hur många datorer kan Åke maximalt skicka från Gunnars källare till Dicks datoraffär? Besvara frågan genom att finna maxflöde från nod 1 till nod 6. (Använd lämplig metod, och visa alla steg i metoden tydligt.) Ange minsnitt. (3p)

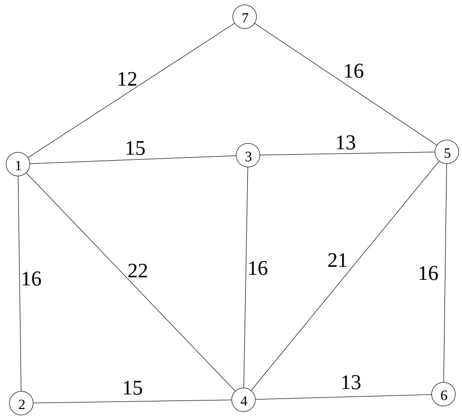
Uppgift 4

Finn en billigaste lösning till tillordningsproblemet med följande kostnadsmatris. Ange optimal duallösning. (3p)

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 4 & 5 & 3 \\ 4 & 5 & 6 & 2 \\ 5 & 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Uppgift 5

Betrakta följande oriktade nätverk med bågkostnader.



a) Man vill finna en rundtur som besöker varje nod en gång och som är så kort som möjligt. Använd en 1-trädsrelaxation av problemet för att få en optimistisk uppskattning av det optimala målfunktionsvärdet. Använd en heuristik för att försöka finna en tillåten lösning, och förklara ev. svårigheter som uppstår. (3p)

b) Innehåller grafen en rundtur som genomgår varje båge exakt en gång? Finn en billigaste rundtur som använder varje båge minst en gång. (3p)

Uppgift 6

Betrakta det oriktade nätverket i uppgift 5, men där vi ignorerar bågkostnaderna.

a) Finn en matchning med många bågar med följande heuristik: Välj en båge, ta med den i matchningen. Ta bort alla bågar som ansluter till matchade noder. Upprepa tills inga flera bågar kan tas med. Börja med båge (1,4)! Är den resulterande matchningen maximal? (2p)

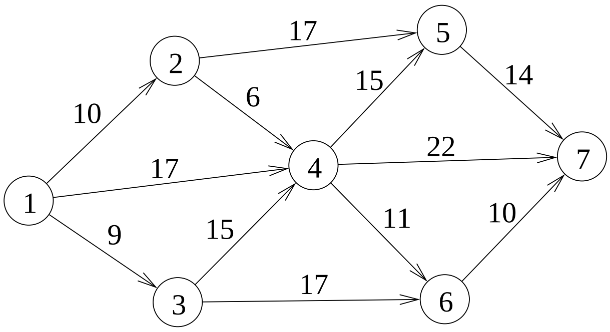
b) Utöka matchningen genom att iterativt finna alternerande/utökande väg, tills ingen förbättring kan ske. (Visa hur du gör.) Är den resulterande matchningen maximal? (2p)

c) Ange övre och undre gränser på hur många färger som krävs för en minimal nodfärgning i grafen. Motivera. (Använd en enkel konstruktiv heuristik för att få en övre gräns.) (2p)

d) Ange övre och undre gränser på hur många färger som krävs för en minimal bågfärgning i grafen. Motivera. (Använd en enkel konstruktiv heuristik för att få en övre gräns.) (2p)

Uppgift 7

Betrakta nedanstående riktade graf med bågkostnader.



a) Finn billigaste väg från nod 1 till varje annan nod. (2p)

b) Kan man ändra en bågkostnad så att man får två helt olika billigaste vägar mellan nod 1 och nod 7, och i så fall hur? (Om inte, motivera varför inte.) Använd nodpriser från uppgift a i motivationen. (1p)