Matematiska institutionen
Optimeringslära

TENTAMEN

TAOP33/TEN 2
KOMBINATORISK OPTIMERING GRUNDKURS

Datum:	28 augusti 2015
Tid:	14.00-19.00
Hjälpmedel:	Miniräknare
	Kurslitteratur: Kaj Holmberg: *Optimering*
	Anteckningar i boken får förekomma.
Antal uppgifter:	8
Antal sidor:	6
	Uppgifterna är *inte* ordnade efter svårighetsgrad.
	Totalt antal poäng är 40. För godkänt krävs 16 poäng.
Examinator:	Kaj Holmberg
Jourhavande lärare:	Kaj Holmberg, tel 013-282867

Resultat meddelas per e-post

Tentamensinstruktioner

När Du löser uppgifterna

Redovisa dina beräkningar och din lösningsmetodik noga.
Motivera alla påståenden du gör.
Använd de standardmetoder som ingår i kursen.

Skriv endast på ena sidan av lösningsbladen. Använd inte rödpenna.
Behandla endast en huvuduppgift på varje blad.

Vid skrivningens slut

Sortera dina lösningsblad i uppgiftsordning.
Markera på omslaget vilka uppgifter du behandlat.
Kontrollräkna antalet inlämnade blad och fyll i antalet på omslaget.

Uppgift 1

Konsultfirman NeuOpt behöver utöka personalen. I första hand tänker man sig använda ett bemanningsföretag, Helpia, som erbjuder deltidstjänster i valfria andelar. Helpia erbjuder arbetskraft i form av nyutexaminerade ingenjörer från KTH, LiU och Chalmers. Genom att analysera sina behov, och väga det mot de lokalkrav och lönekrav ingenjörerna ställer, kommer NeuOpt fram till följande optimeringsmodell, där x_1 anger antal ingenjörer från KTH, x_2 anger antal ingenjörer från LiU och x_3 anger antal ingenjörer från Chalmers. (Antal betyder här snarare andel, eftersom deltid är möjlig, och kan både vara större eller mindre än ett.) Målfunktionen anger nytta för NeuOpt (där optimeringskunskap är en viktig del). Bivillkor 1 baseras på lokalkrav och bivillkor 2 på lönekrav.

$$
\begin{array}{llrcrcrcll}
\max & z = & 3x_1 & + & 4x_2 & + & 5x_3 & & & \\
\text{då} & & 3x_1 & + & 2x_2 & + & 5x_3 & \leq & 7 & \quad (1) \\
& & 4x_1 & + & 4x_2 & + & 5x_3 & \leq & 8 & \quad (2) \\
& & x_1, & & x_2, & & x_3 & \geq & 0 &
\end{array}
$$

a) Hjälp NeuOpt och lös problemet med simplexmetoden. Ange optimallösning samt total nytta. (3p)

b) Vad skulle man tjäna på att erbjuda de nya mer lokaler? Vad skulle man tjäna på att erbjuda de nya mer lön? (Vi antar att bivillkoren är skalade på ett jämförbart sätt.) (1p)

c) Helpia får tag på personer från LTU, vilka har nytta 2, lokalkrav 4 och lönekrav 3. Skulle sådana personer förbättra resultatet i uppgift a? (Svara m.h.a. reducerad kostnad.) (1p)

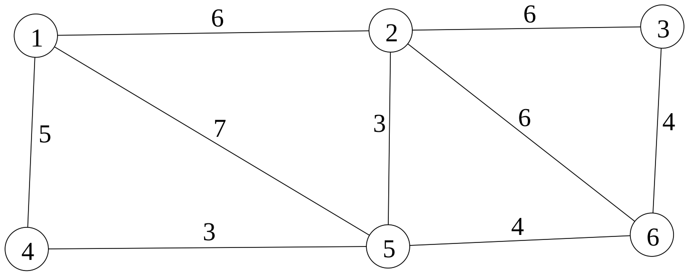
d) Formulera LP-dualen till problemet ovan. Lös problemet grafiskt. (Ledning: Duallösningen kan även läsas ut ur optimaltablån i uppgift a för kontroll.) (3p)

Uppgift 2

Betrakta problemet i uppgift 1. NeuOpt bestämmer sig för att direkt anställning är bättre än att gå via Helpia, och att man bara tänker sig heltid. Detta betyder att variablerna i problemet måste vara heltal. Dock faller personer från KTH bort, eftersom NeuOpt inte har sitt kontor i Stockholm. (x_1 fixeras alltså till noll.) Finn en optimallösning till heltalsproblemet med Land-Doig-Dakins trädsökningsmetod. Tvådimensionella LP-problem får lösas grafiskt. Ange lösning och total nytta. Jämför med resultatet i uppgift a. Ange skillnaden i målfunktionsvärde (vilket motsvarar den avgift man skulle vara villig att betala Helpia för att få deras hjälp). (3p)

Uppgift 3

VM i orientering är slut, alla deltagarna har åkt hem och nu gäller det bara att städa upp efteråt. Nedanstående graf visar kontrollerna (noderna) samt de möjliga vägarna att ta sig mellan dem (på ett någorlunda bekvämt sätt). På bågarna står tiden det tar att gå sträckan.



a) Oskar får uppgiften att samla in skärmarna vid kontrollerna. Han börjar och slutar vid nod 1, och vill givetvis använda minsta möjliga tid. Vilket känt optimeringsproblem är detta? Finn en bra rundtur åt Oskar med valfri metod. Beskriv dock metoden. Finn även en undre gräns på det optimala målfunktionsvärdet med en känd relaxation av problemet, och ange hur långt ifrån optimum lösningen är (i värsta fall). (3p)

b) Orvar får i uppgift att plocka upp eventuellt skräp som orienterarna slängt i skogen. Han antar att alla orienterare har följt de möjliga vägarna i grafen. (Dock ej att alla har följt samma väg som Oskar.) Han måste alltså gå längs alla möjliga vägar för att kontrollera om det finns något skräp där, och i så fall plocka upp det. Orvar vill (liksom Oskar) minimera tiden för det hela, och börjar och slutar (liksom Oskar) i nod 1. Vilket känt optimeringsproblem är detta? Finn en optimal rundtur. (Ledning: En enkel billigaste-väg sökning kan ingå.) (3p)

c) Innan tävlingen hade man planer på att använda elektriska stämplingsenheter vid kontrollerna. Nackdelen var dock att man då behövde dra gömda elledningar till alla kontrollerna. (Antag att el hämtas i nod 1.) Möjliga ledningsdragningar anses vara de vägar som visas i grafen, och kostnaden antas vara proportionell mot de angivna koefficienterna. Man vill dra ledningar som binder ihop alla noder och som tillsammans har minimal kostnad. Vilket känt optimeringsproblem är detta? Finn en optimal lösning. Ange totalkostnad. (Att sedan hela idén förkastades som helt orealistisk är i detta fall ovidkommande.) (2p)

Uppgift 4

Betrakta det oriktade nätverket i uppgift 3, men där vi ignorerar bågkostnaderna.

a) Finn en matchning med många bågar med följande heuristik: Välj en båge, ta med den i matchningen. Ta bort alla bågar som ansluter till matchade noder. Upprepa tills inga flera bågar kan tas med. Börja med båge (1,5)! Är den resulterande matchningen maximal? (1p)

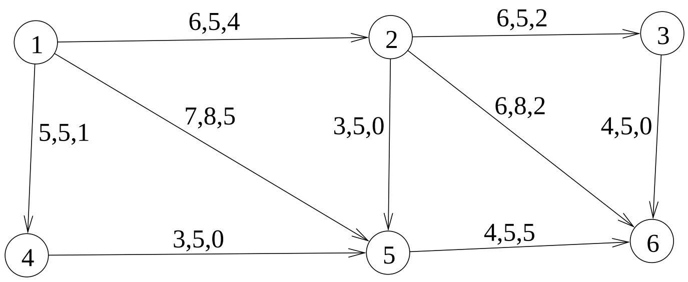
b) Utöka matchningen genom att iterativt finna alternerande/utökande väg, tills ingen förbättring kan ske. (Visa hur du gör.) Är den resulterande matchningen maximal? (2p)

c) Ange övre och undre gränser på hur många färger som krävs för en minimal nodfärgning i grafen. Motivera. (Använd en enkel konstruktiv heuristik för att få en övre gräns.) (2p)

d) Ange övre och undre gränser på hur många färger som krävs för en minimal bågfärgning i grafen. Motivera. (Använd en enkel konstruktiv heuristik för att få en övre gräns.) (2p)

Uppgift 5

Lasses Last AB ska transportera bullar till de olika depåerna i ett större cykellopp. Nedanstående nätverk visar de möjliga transportvägarna. I nod 1 finns 10 pallar bullar, och man vill ha en pall till nod 4, två pallar till nod 3 och 7 pallar till nod 6. (Erfarenheten visar att åtgången skiljer sig mycket mellan de olika depåerna.) På bågarna står först transportkostnad per pall, sedan övre gräns för hur många pallar som kan skickas den vägen (vissa vägar är ganska små, så Lasse kan inte använda den största lastbilen) och sist hur mycket man skickade förra gången loppet gick.



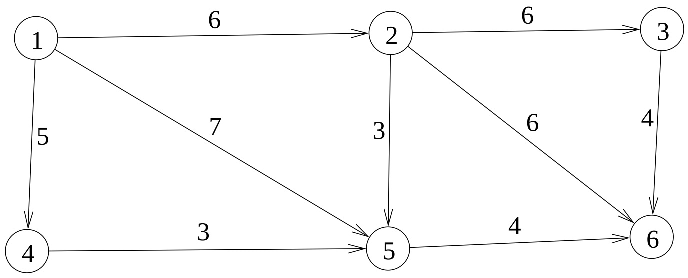
a) Är det optimalt att skicka som man gjorde förra gången, om man vill minimera transportkostnaderna? Använd simplexmetoden för nätverk för att besvara den frågan. (2p)

b) Man upptäcker att vägen mellan nod 4 och 5 har förbättrats sedan förra gången, och nu kostar 1 per pall. Kommer detta att ändra det optimala flödet? Starta med lösningen i uppgift a och finn ett nytt minkostnadsflöde med simplexteknik. (2p)

c) Lasse vill köra en pall från nod 3 till nod 6 (för då kan han ge Berit skjuts den biten). Hur skulle totalkostnaden förändras av detta? Ledning: Det finns ingen anledning att finna den nya lösningen, eftersom svaret kan finnas med hjälp av nodpriser. (Utgå från lösningen i uppgift a.) (1p)

Uppgift 6

Bilförsäljare Östen ska köra en Ferrari från nod 1 till nod 6 i nedanstående nätverk, där bågkoefficienterna anger körtid (om man håller hastighetsbegränsningarna).



a) Först funderar Östen på vilken väg han ska åka för att minimera tiden, men inser att hans personliga målfunktion inte är att komma fram så snabbt som möjligt. Istället kan han tänka sig köra runt lite mer för att få beundrande blickar från personer han känner. Därför gör han följande förändringar av grafen. Gatorna (1,5) och (2,6) anses oriktade, dvs. kan även köras åt andra hållet (lägg till motriktade bågar med samma körtider). Dessutom sänker han alla bågkostnader med 4, vilket motsvarar den positiva effekt han upplever av att köra omkring i en sådan bil. (Att vissa kostnader då blir negativa är i sin ordning, och innebär bara att han gärna vill åka dessa vägar.) Finn nu den bästa vägen för honom från nod 1 till nod 6 med en passande metod. (2p)

b) Betrakta uppgift b. Vad händer om Östen värderar sin njutning så högt att han sänker alla kostnaderna med 6 istället för 4? (1p)

Uppgift 7

Betrakta grafen i uppgift 6, men tolka bågkoefficienterna som kapaciteter. Finn maxflöde från nod 1 till nod 6. Starta med flödet noll och gör alla steg i metoden tydligt. Ange minsnitt. (3p)

Uppgift 8

Fyra studenter ska göra fyra olika fåniga uppgifter vid en nollningslek. En fadder uppskattar tidsåtgången i minuter för varje student att göra varje uppgift, se följande matris, där rader motsvarar studenter och kolumner uppgifter. Studenterna vill fördela uppgifterna mellan sig så att pinan blir så kort som möjligt, dvs. så att den total tiden blir minimal. Varje student ska göra en uppgift och varje uppgift ska göras en gång.

$$C = \begin{pmatrix} 6 & 8 & 4 & 5 \\ 6 & 8 & 9 & 5 \\ 7 & 8 & 3 & 6 \\ 5 & 9 & 4 & 5 \end{pmatrix}$$

a) Lös problemet med ungerska metoden. Ange optimal lösning samt total tid. (2p)

b) Faddern anser att studenterna har missuppfattat det hela. Det är inte en pina, det är ett nöje. Därför vill hen ändra på tillordningen, så att det hela tar så lång tid som möjligt. Finn den nya tillordningen genom att använda en enkel modifiering av standardmetoden. Ange total tid. (1p)