Matematiska institutionen
Optimeringslära

TENTAMEN

TAOP33/TEN 2
KOMBINATORISK OPTIMERING GRUNDKURS

Datum:	15 januari 2016
Tid:	8.00-13.00
Hjälpmedel:	Miniräknare
	Kurslitteratur: Kaj Holmberg: *Optimering*
	Anteckningar i boken får förekomma.
Antal uppgifter:	7
Antal sidor:	6
	Uppgifterna är *inte* ordnade efter svårighetsgrad.
	Totalt antal poäng är 40. För godkänt krävs 16 poäng.
Examinator:	Kaj Holmberg
Jourhavande lärare:	Kaj Holmberg, tel 013-282867

Resultat meddelas per e-post

Tentamensinstruktioner

När Du löser uppgifterna

Redovisa dina beräkningar och din lösningsmetodik noga.
Motivera alla påståenden du gör.
Använd de standardmetoder som ingår i kursen.

Skriv endast på ena sidan av lösningsbladen. Använd inte rödpenna.
Behandla endast en huvuduppgift på varje blad.

Vid skrivningens slut

Sortera dina lösningsblad i uppgiftsordning.
Markera på omslaget vilka uppgifter du behandlat.
Kontrollräkna antalet inlämnade blad och fyll i antalet på omslaget.

Uppgift 1

Kombinato AB har fyra olika produkter man kan tillverka, där varje produkt har en viss vinst och viss åtgång av två råvaror, nämligen silikon och germanium. Man vill maximera vinsten och tar fram följande optimeringsmodell, där x_j anger antal enheter av sort j man ska tillverka. Det först bivillkoret ser till att man inte använder för mycket silikon, och det andra samma sak för germanium.

$$
\begin{array}{llrcrcrcrcll}
\max & z = & 3x_1 & + & 2x_2 & + & 4x_3 & + & 2x_4 & & & \\
\text{då} & & x_1 & + & 2x_2 & + & x_3 & + & 5x_4 & \leq & 6 & (1) \\
 & & x_1 & + & 3x_2 & + & 2x_3 & + & 3x_4 & \leq & 8 & (2) \\
 & & x_1, & & x_2, & & x_3, & & x_4 & \geq & 0 &
\end{array}
$$

a) Hjälp Kombinato och lös problemet med simplexmetoden. Ange optimallösning samt total vinst. (3p)

b) Man kan köpa in lite mer silikon *eller* germanium. Vilket ska man välja, och hur mycket skulle man tjäna på det? (1p)

c) Man funderar på att göra en ny produkt, med vinst 6 och bivillkorskoefficienter 2 och 4. Skulle denna produkt förbättra resultatet i uppgift a? (Lös ej om.) (1p)

d) Formulera LP-dualen till problemet ovan. Lös problemet grafiskt. (3p)

Uppgift 2

a) MaxMatch AB sysslar med att sätta ihop bra, produktiva arbetsgrupper av personalen i andra företag, och man ska nu göra detta åt Kombinato. Det behöver inte vara lika många personer i varje grupp. Kombinato har skapat en oriktad graf med en nod för varje person. En båge mellan två noder betyder att de två personerna pratar samma språk (dvs. kan kommunicera bra) och kan arbeta ihop på ett godtagbart sätt. Vad betyder följande grafstrukturer i detta sammanhang, och vilka slutsatser om gruppsammansättning kan man dra?

1. En klick (fullständig subgraf).
2. En sammanhängande subgraf.
3. En subgraf som är ett träd.
4. En subgraf som är en cykel.
5. Ej sammanhängande komponenter.
6. Isolerade noder.

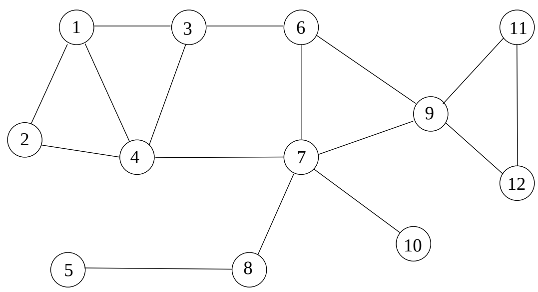
Nämn också vad det betyder om en person blir sjuk. (3p)

b) Antag istället att bågarna står för att personerna inte tål varandra (dvs. inte kan samarbeta). Vad betyder nu följande grafstrukturer, och vilka slutsatser om gruppsammansättning kan man dra?

1. En klick (fullständig subgraf).
2. En sammanhängande subgraf.
3. Ej sammanhängande komponenter.
4. Isolerade noder.

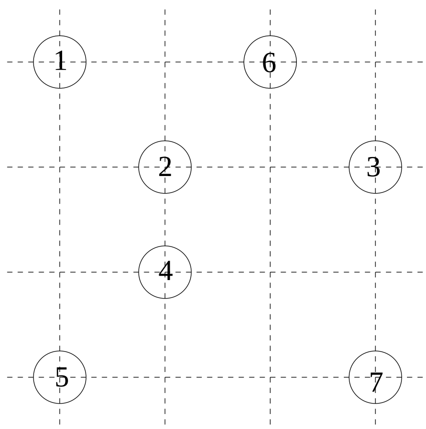
(1p)

c) Betrakta situationen i uppgift a, där det är bestämt att det ska vara två personer i varje grupp. Grafen nedan ger möjliga samarbeten. Kombinato har själva satt ihop följande grupper: (1,4), (3,6), (5,8), (7,10) och (9,11). Några personer kommer inte med i någon grupp, och Kombinato tillåter inte att det är fler än två i någon grupp. Finns det någon gruppbildning med flera tvåpersonsgrupper? Använd en känd metod för att finna en (eller för att visa att ingen finns). Beskriv metoden. (3p)



Uppgift 3

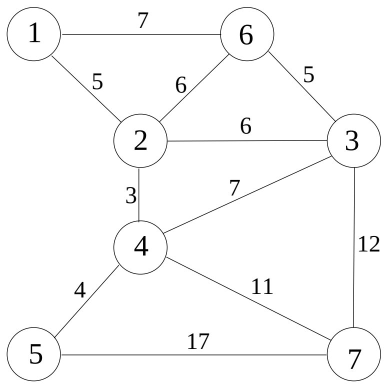
a) Tomten ska dela ut julklappar till familjer bosatta i noderna i följande figur. Han använder numera helikopter (istället för en släde dragen av flygande renar). Därför kan han ta raka vägen mellan noderna, så grafen han kan färdas i är en fullständig graf. Bågarna är inte utritade i figuren. Istället finns ett streckat rutnät markerat som hjälp. En ruta i detta nät har längden 1, och vi räknar med Euklidiska avstånd (dvs. avståndet fågelvägen). (I denna uppgift kan man använda följande approximationer: $\sqrt{2} \approx 1.4$, $\sqrt{5} \approx 2.2$, $\sqrt{10} \approx 3.2$, $\sqrt{13} \approx 3.6$.)



Uppgiften är att finna en kortaste rundtur som besöker varje nod en gång. Vilket känt optimeringsproblem är detta? Börjar med att finna en tillåten lösning med en heuristik. (En känd heuristik ska namnges, medan en okänd heuristik måste beskrivas.) Använd därefter en bra relaxation av problemet, för att få en undre gräns till det optimala målfunktionsvärdet. Ange hur långt ifrån optimum den ovan funna lösningen som sämst är. (3p)

b) Alla familjerna fick var sin dator, så nu vill man dra fibernät till samtliga noder. Av olika orsaker kan man bara dra fibrerna vertikalt och/eller horisontellt i grafen, inte snett. Detta medför att man inte ska räkna med Euklidiska avstånd, utan med rektilinjära (som också kallas Manhattan-avstånd). Avståndet mellan två punkter är då skillnaden i x-led plus skillnaden i y-led. Kostnaden är proportionell mot avståndet. Uppgiften är alltså att finna ett billigaste nätverk som binder ihop alla noderna. Finn en optimallösning med en känd metod. (2p)

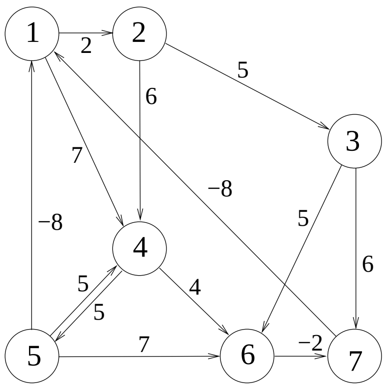
c) Militären förbjuder okontrollerad flygtrafik i området, så tomten blir tvungen att använda de på marken befintliga vägarna, vilka ges av bågarna i följande graf. På varje båge står avståndet.



Det visar sig dessutom att julklapparna ska delas ut till alla familjer som bor längs med vägarna, inte i noderna. Vilket optimeringsproblem blir det? Finn en optimal rundtur. (3p)

Uppgift 4

a) Cyklisten Velo ska cykla från nod 1 till nod 7 i följande graf i stark vind. Bågkoefficienterna anger hur jobbigt Velo tycker att varje vägsträcka är. (Medvind kan medföra en positiv upplevelse, vilket ger negativa “kostnader”.) Finn väg med minimal kostnad åt Velo med lämplig metod. (2p)



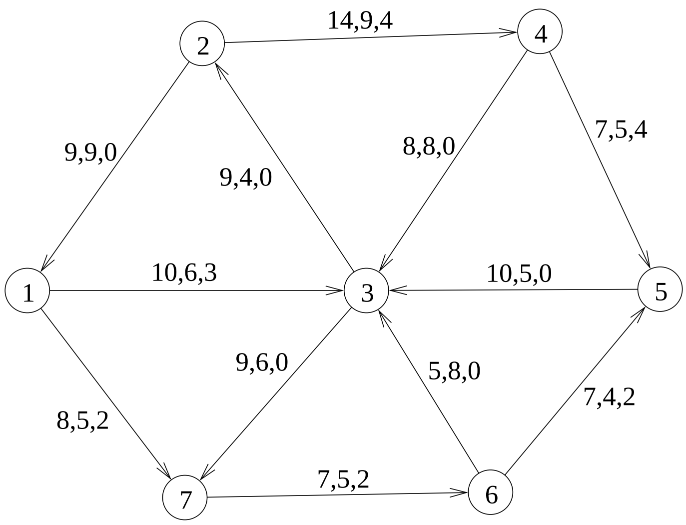
b) Det finns en skogsväg som går från nod 4 till nod 3. Vad får kostnaden för den högst vara, om det ska löna sig att ta den vägen? (1p)

Uppgift 5

Ange undre gränser på hur många färger som krävs för en minimal nodfärgning resp. bågfärgning i den oriktade grafen i uppgift 2. Motivera. (2p)

Uppgift 6

Kombinato AB ska transportera sina produkter från lagren till affärerna där de säljs. Följande nätverk visar de möjliga transportvägarna.



I nod 1 finns 5 pallar, i nod 2 4, och man vill ha 3 pallar till nod 3 och 6 till nod 5. På bågarna står först transportkostnad per enhet, sedan övre gräns för hur många pallar som kan skickas den vägen och sist hur mycket man skickade förra gången detta var aktuellt.

a) Är det optimalt att skicka som man gjorde förra gången, om man vill minimera transportkostnaderna? Använd simplexmetoden för nätverk för att besvara den frågan. (2p)

b) Man upptäcker att bågen från nod 5 till nod 3 har fått ändrad riktning p.g.a. en ombyggnad. Den ska gå från nod 3 till nod 5, men för övrigt ha samma data (kostnad, kapacitet). Kommer detta att ändra det optimala flödet? Starta med lösningen i uppgift a och finn ett nytt minkostnadsflöde med simplexteknik. (2p)

c) Man kommer att inrätta en ny transportväg från nod 2 till nod 6. Hur mycket får den kosta om totalkostnaden skulle minskas av detta? (Utgå från lösningen i uppgift b.) (1p)

d) Hur mycket kan man maximalt skicka från nod 1 till nod 5 i nätverket i uppgift a? Starta med flöde noll och gör alla steg i metoden tydligt. Ange minsnitt. (3p)

Uppgift 7

Fyra orienterare ska springa fyra olika sträckor i en tävling. Sträckorna har olika terräng och personerna olika egenskaper (löpstyrka, kartläsningsskicklighet etc). Man har uppskattat tidsåtgången i minuter för varje person att springa varje sträcka, se följande matris, där rader motsvarar personer och kolumner sträckor. Man vill fördela sträckorna så att den total tiden blir minimal. Varje person ska springa en sträcka och varje sträcka ska springas en gång.

$$C = \begin{pmatrix} 6 & 18 & 4 & 15 \\ 8 & 18 & 7 & 14 \\ 8 & 15 & 7 & 16 \\ 4 & 11 & 4 & 15 \end{pmatrix}$$

a) Lös problemet med ungerska metoden. Ange optimal lösning samt total tid. Ange även dual optimallösning och kontrollera starka dualsatsen. (3p)

b) Person 3 har skadat foten och behöver 7 minuter mer på varje sträcka. (Lägg till 7 till tredje raden i matrisen.) Hur förändras den primala och duala optimallösningen? (Lös ej om problemet.) (1p)