Matematiska institutionen
Optimeringslära

TENTAMEN

TAOP33/TEN 2
KOMBINATORISK OPTIMERING GRUNDKURS

Datum:	31 mars 2016
Tid:	8.00-13.00
Hjälpmedel:	Miniräknare
	Kurslitteratur: Kaj Holmberg: *Optimering*
	Anteckningar i boken får förekomma.
Antal uppgifter:	4
Antal sidor:	5
	Uppgifterna är *inte* ordnade efter svårighetsgrad.
	Totalt antal poäng är 40. För godkänt krävs 16 poäng.
Examinator:	Kaj Holmberg
Jourhavande lärare:	Kaj Holmberg, tel 013-282867

Resultat meddelas per e-post

Tentamensinstruktioner

När Du löser uppgifterna

Redovisa dina beräkningar och din lösningsmetodik noga.
Motivera alla påståenden du gör.
Använd de standardmetoder som ingår i kursen.

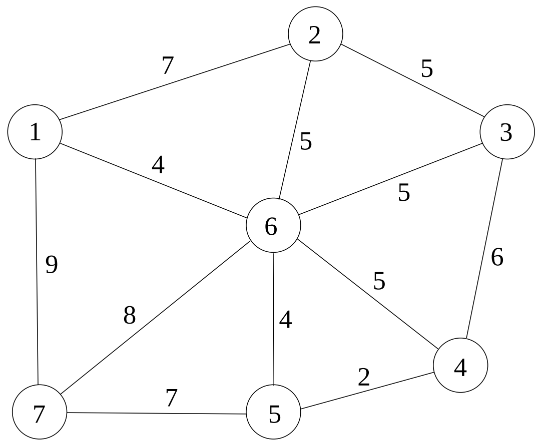
Skriv endast på ena sidan av lösningsbladen. Använd inte rödpenna.
Behandla endast en huvuduppgift på varje blad.

Vid skrivningens slut

Sortera dina lösningsblad i uppgiftsordning.
Markera på omslaget vilka uppgifter du behandlat.
Kontrollräkna antalet inlämnade blad och fyll i antalet på omslaget.

Uppgift 1

Nedanstående graf föreställer den lilla staden Vallköping. Firma Transpod ska ta över transporterna av olika slag i orten. Koefficienterna på bågarna anger avstånd.



a) Den första uppgiften är att bygga ett linjenät för trådbuss som förbinder samtliga noder i orten. Man ska alltså bestämma längs vilka gator (bågar i grafen) som man ska installera elektriska ledningar, och kostnaden för varje länk är proportionell mot avståndet. Till detta kommer en fast kostnad för varje nod som ansluts till nätet. Man ska kunna ta sig från varje nod till varje annan nod, men vägen får gå via andra noder. Målet är att minimera totala kostnaden för installationen. Vilket känt optimeringsproblem är detta? Lös det med lämplig metod. (Ange vilken metod du använder.) (2p)

b) Nästa uppgift är att lägga upp en tur för sophämtningen. Varje invånare i Vallköping ska dra sin soptunna till närmaste korsning (nod i grafen). Man använder bara en sopbil i Vallköping, och sopor ska hämtas i varje nod. Kostnaden för turen är proportionell mot det totala avståndet sopbilen kör, och detta vill man minimera.

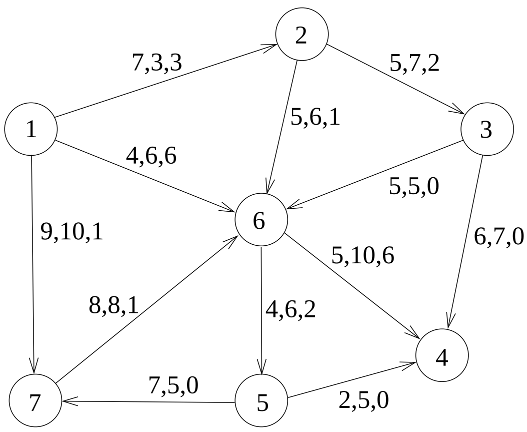
Vilket känt optimeringsproblem är detta? Finn en tillåten lösning med en lämplig heuristik. (Ange vilken metod du använder.) Finn även en undre uppskattning av totalkostnaden genom att lösa en lämplig relaxation av problemet, och ange hur långt ifrån optimum lösningen som sämst är. (3p)

c) Efter klagomål från de boende tar man bort bestämmelsen att varje soptunna skall dras till närmaste korsning. Istället ska soptunnorna hämtas längs gatorna. De flesta gator är så smala att man kan ta båda sidorna på en gång (i valfri riktning). Gatorna (1,2) och (3,4) är dock så breda att man måste köra dem två gånger, men även detta kan ske i valfri riktning. Vilket känt optimeringsproblem är detta? Lös det med lämplig metod. (3p)

d) Varje dag ska Transpod skicka en lastbil från nod 1 (järnvägsstationen) med varor till två “supermarkets” i nod 3 och nod 5. Man vill ha en rundtur som börjar i nod 1, passerar nod 3 och 5 i valfri ordning, och sedan återvänder till nod 1. Rundturen ska vara så kort som möjligt.

Detta är inte riktigt ett standardproblem som tagits upp i kursen, men kan lösas på följande sätt. Finn först de billigaste vägarna mellan de tre noderna, och skapa sedan ett nytt nätverk med bara dessa tre noder, med bågar som motsvarar varje billigaste väg. Finn sedan en kort(ast) rundtur i det nya nätverket (med lämplig metod). Avsluta med att ta reda på hur den funna turen ska gå i den ursprungliga grafen. Gör detta! Visa varje steg i metoden tydligt. (3p)

e) En dag anländer 10 grävmaskiner till nod 1 inför stora byggnadsarbeten. Av dessa ska 6 köras till nod 4, 2 till nod 3 och 2 till nod 5, för att påbörja grävningen av husgrunder. Eftersom grävmaskiner är stora, tunga och kör långsamt, dvs. hindrar annan trafik och sliter på vägbanorna, har man många begränsningar på hur de får köra genom orten. I figuren nedan visas möjligheterna. Man har bl.a. bestämt att bara vissa riktningar på gatorna får användas, och infört begränsningar på hur många grävmaskiner som maximalt får köra på varje gata. I nätverket står på varje båge först avståndet, sedan maxgräns för antalet grävmaskiner och sist flödet i ett förslag från stadskontoret. Man vill minimera det totala slitaget på stadens gator, vilket anses vara proportionellt mot den totalt körda sträckan.



Är det föreslagna flödet optimalt? Använd simplexteknik för minkostnadsflödesproblem för att besvara frågan. (2p)

f) Betrakta problemet i uppgift e. Man ändrar den tillåtna riktningen på båge (5,4) till (4,5). Är flödet nu optimalt? (1p)

g) Betrakta problemet i uppgift e. Man ändrar kostnaden på båge (3,4) från 6 till 4. Är flödet nu optimalt? Om inte, finn optimalt flöde. (2p)

h) Betrakta problemet i uppgift e och lösningen i uppgift g. Man kommer att inrätta en ny transportväg från nod 7 till nod 2. Hur mycket får den kosta om totalkostnaden ska minskas av detta? (1p)

i) Hur mycket kan man maximalt skicka från nod 1 till nod 4 i nätverket i uppgift e? Starta med flöde noll och gör alla steg i metoden tydligt. Ange minsnitt. (3p)

Uppgift 2

Transpod ska fylla en lastbil med byggnadsmaterial och köra den till en byggarbetsplats. Man har fyra olika sorters material som kan tas med, och två begränsningar, nämligen volym och vikt. Följande optimeringsmodell kan användas, där x_j anger antal enheter av sort j man ska ta med. Det först bivillkoret ser till att volymen inte blir för stor, och det andra att lasten inte blir för tung. Det man inte tar med idag, får vänta till imorgon, och målfunktionen speglar värdet av att få dit materialet idag.

$$
\begin{array}{llrcrcrcrcll}
\max & z = & 4x_1 & + & 5x_2 & + & 3x_3 & + & 3x_4 & & & \\
\text{då} & & x_1 & + & 3x_2 & + & 2x_3 & + & x_4 & \leq & 7 & (1) \\
 & & 2x_1 & + & 2x_2 & + & x_3 & + & x_4 & \leq & 8 & (2) \\
 & & x_1, & & x_2, & & x_3, & & x_4 & \geq & 0 &
\end{array}
$$

a) Starta i origo och gör två iterationer med simplexmetoden. Ange erhållen lösning. Är den optimal? (3p)

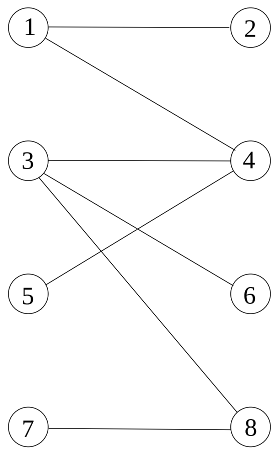
b) Överingenjör Arne påstår att det vore optimalt att ta med en enhet av sort 1 och 6 enheter av sort 4. Ta reda på om han har rätt eller fel med hjälp av LP-dualitet. (3p)

c) Utgående från lösningen i uppgift b, skulle man tjäna på att lasta lastbilen lite tyngre än tillåtet? Skulle man tjäna på att lasta med råge, dvs. öka volymen? (1p)

d) Rita upp LP-dualen till problemet. Rita in de duallösningar som erhölls i uppgift a och b och verifiera grafiskt svaren om optimalitet i uppgift a och b. (2p)

Uppgift 3

a) LTC (Linköping Tennis Club) ska sätta ihop fyra tvåpersonerslag av sina åtta spelare för en dubbeltävling. Man har först delat upp personerna i två grupper, baserat på deras spelstil, där en person av varje grupp ska ingå i varje lag. Därefter har man ritat in bågar i följande graf mellan spelare som kan spela bra ihop.



Lite oförsiktigt började lagledningen med att sätta ihop spelare 1 och 4 samt spelare 3 och 8 (för att spelare 1 och 3 helst ville det). Sedan kom man inte längre, för det fanns inga möjligheter kvar.

Hjälp LTC att sätta samman fyra bra lag med hjälp av matchningsmetodik genom att finna utökande vägar utgående från den givna lösningen. (3p)

b) Den tudelade strukturen gör att man också kan se det som ett tillordningsproblem. Sätt upp en kostnadsmatris med kostnad 0 för kopplingar som är tillåtna och kostnad 9 för kopplingar som inte är tillåtna. Lös problemet med ungerska metoden. Ange duallösning. Vad skulle det betyda om man fick en annan duallösning än den man fick? (3p)

c) Ange undre gränser på hur många färger som krävs för en minimal nodfärgning resp. bågfärgning i grafen. Motivera. (2p)

Uppgift 4

Betrakta problemställningen i uppgift 2. Nästa dag ska Transpod göra en ny transport, nu med en annan lastbil och med enheter som måste vara heltal. Volymen spelar nu ingen roll, så problemet man vill lösa är följande.

$$\begin{array}{llrcrcrl} \max & z = & 4x_1 & + & 5x_2 & & & \\ \text{då} & & 2x_1 & + & 4x_2 & \leq & 13 & \\ & & x_1, & & x_2 & \geq & 0, & \text{heltal} \end{array}$$

Finn en optimallösning till problemet med Land-Doig-Dakins trädsökningsmetod. Tvådimensionella LP-problem får lösas grafiskt. (3p)