Matematiska institutionen
Optimeringslära

TENTAMEN

TAOP33/TEN 2
KOMBINATORISK OPTIMERING GRUNDKURS

Datum:	13 januari 2017
Tid:	8.00-13.00
Hjälpmedel:	Miniräknare
	Kurslitteratur: Kaj Holmberg: *Optimering*
	Anteckningar i boken får förekomma.
Antal uppgifter:	6
Antal sidor:	5
	Uppgifterna är *inte* ordnade efter svårighetsgrad.
	Totalt antal poäng är 40. För godkänt krävs 16 poäng.
Examinator:	Kaj Holmberg
Jourhavande lärare:	Kaj Holmberg, tel 013-282867

Resultat meddelas per e-post

Tentamensinstruktioner

När Du löser uppgifterna

Redovisa dina beräkningar och din lösningsmetodik noga.
Motivera alla påståenden du gör.
Använd de standardmetoder som ingår i kursen.

Skriv endast på ena sidan av lösningsbladen. Använd inte rödpenna.
Behandla endast en huvuduppgift på varje blad.

Vid skrivningens slut

Sortera dina lösningsblad i uppgiftsordning.
Markera på omslaget vilka uppgifter du behandlat.
Kontrollräkna antalet inlämnade blad och fyll i antalet på omslaget.

Uppgift 1

Pettsons Data har formulerat följande LP-problem för att bestämma en bra produktmix av tre olika sorters datorer. Tillgången av komponenter begränsar tillverkningen. Man vill maximera vinsten.

$$\begin{array}{llrcrcrcrl}
\max & z = & 3x_1 & + & 4x_2 & + & 5x_3 & & & \\
\text{då} & & & & x_2 & + & x_3 & \leq & 6 & (1) \\
& & x_1 & + & 2x_2 & + & x_3 & \leq & 8 & (2) \\
& & 2x_1 & + & 3x_2 & + & 2x_3 & \leq & 20 & (3) \\
& & x_1, & & x_2, & & x_3 & \geq & 0 &
\end{array}$$

a) Lös LP-problemet med simplexmetoden. Ange optimallösning och total vinst. Vilka bivillkor blir aktiva? (3p)

b) Formulera LP-dualen till LP-problemet ovan. Ange optimal duallösning mha. optimaltablån i uppgift a. Kontrollera att den duala lösningen är tillåten, samt att komplementaritetsvillkoren är uppfyllda. (3p)

c) Antag att man kan få ytterligare en enhet av en av de tre komponenterna. Vilken ska man välja så att förbättringen blir så stor som möjligt? (1p)

d) Antag att vinsten för datorsort 2 ändras. För vilka värden på vinsten fås en annan optimallösning än den som erhölls i uppgift a? (1p)

Uppgift 2

Fem studenter ska göra fem delar i en programmeringsuppgift. Varje uppgift ska göras en gång och varje student ska göra en uppgift. Man har uppskattat tiden det skulle ta för varje student att göra varje del på ett felfritt sätt, och detta ges i matrisen nedan, där rader motsvarar studenter och kolumner uppgifter. Man vill fördela uppgifterna så att den totala arbetstiden minimeras.

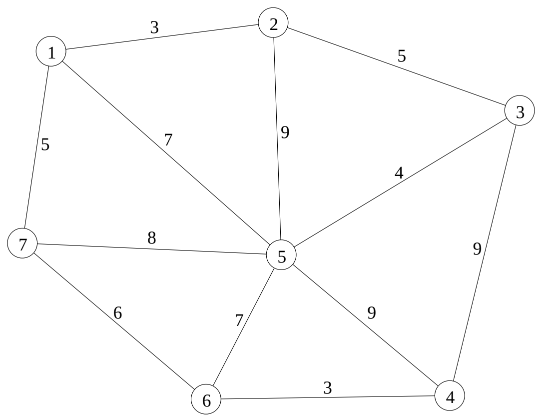
$$C = \begin{pmatrix} 10 & 5 & 8 & 15 & 3 \\ 12 & 6 & 10 & 17 & 3 \\ 12 & 7 & 8 & 20 & 2 \\ 10 & 7 & 9 & 19 & 3 \\ 11 & 6 & 10 & 18 & 2 \end{pmatrix}$$

a) Lös problemet med ungerska metoden. Ange optimal lösning samt målfunktionsvärde. Ange även dual optimallösning och kontrollera starka dualsatsen. (3p)

b) En student kommer på att variationen mellan uppgifterna (kolumnerna) är större än mellan studenterna (raderna), och tycker därför att man borde börja med kolumnerna istället för raderna i ungerska metoden. Gör så och avgör om det går snabbare att lösa problemet på det sättet. Diskutera lite varför (eller varför inte) man kan förvänta sig någon skillnad, och vilken skillnad det ger för dualvariablernas värden. (2p)

Uppgift 3

a) Blixthalka har slagit till under natten, och Bjarne ska sanda gatorna som ges i nedanstående graf. Hans kompis Björne har redan sandat sträckan (3,4). Koefficienterna på bågarna anger avstånd, och Bjarne vill köra så kort sträcka som möjligt. Han startar och slutar turen i nod 1.



Vilket känt optimeringsproblem är detta? Finn en optimal lösning med lämplig metod. Ange vilka bågar som Bjarne får köra två gånger på, samt en optimal rundtur. Är lösningen unik? (3p)

b) Betrakta problemet i uppgift a. Bjarne kommer på att han kan köra dubbelt så snabbt om han inte sandar, dvs. andra gången har kör i en båge. Förändrar det optimallösningen? Motivera! (1p)

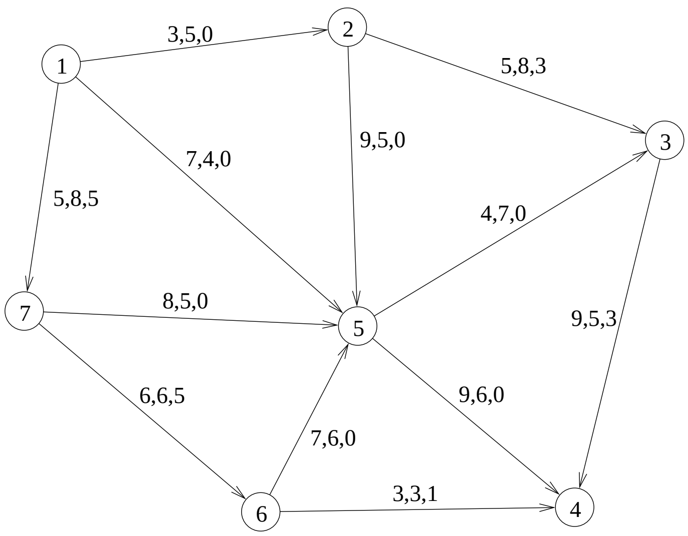
c) Man förvarar sand i lådor vid varje nod i grafen, och Bjarne får i uppdrag att kontrollera att det tillräckligt mycket sand kvar i alla lådorna. Han vill nu finna kortaste rundturen som besöker varje nod. Vilket känt optimeringsproblem är detta? Finn en tillåten lösning med valfri heuristik. Finn även en optimistisk uppskattning av det optimala målfunktionsvärdet och ange hur långt ifrån optimum den erhållna lösning kan vara. (3p)

d) Grafen ovan har en struktur som skulle kunna kallas "hjul", dvs. en nod i mitten, och de övriga i en ring runt den. Hitta på och beskriv en heuristik som finner en bra lösning till uppgift c i en sådan graf, som utnyttjar denna struktur. Ange komplexitet för metoden. (2p)

e) En sandlåda (se uppgift c) kan sägas betjäna anslutande gator, så man behöver inte ha en sandlåda i varje korsning. Vilka kan man ta bort, om målet är att ha så få sandlådor som möjligt, och kravet är att varje gata har en låda i minst en anslutande nod? Vilket känt optimeringsproblem är detta? Finn en lösning med en heuristik. (2p)

Uppgift 4

Pettsons Data har lager i noderna 1 och 2 i grafen nedan, och har fått beställningar från butikerna i noderna 4 och 6. Man har 5 datorer av märket SuperGamerPlus i nod 1 och 3 st i nod 2, och har beställningar på 4 st i nod 6 och 4 st i nod 4. Pettsons praktikant Findus får transportera datorerna en och en, så kostnaderna för transporterna upplevs som linjära. På bågarna i grafen står först avståndet, sedan hur många datorer man rimligtvis maximalt hinner förflytta under dagen (dvs. en övre gräns), och sist Pettsons förslag på hur Findus bör göra transporterna. Kostnaden blir alltså avståndet gånger antalet datorer som går den vägen.



a) Kontrollera om Pettsons förslag ger minsta kostnaden (mha. simplexmetoden för nätverk). Tips: Använd bl.a. båge (5,4) som basbåge. (2p)

b) Pettson har gjort ett misstag. Avståndskoefficienten på båge (1,5) ska vara 4, inte 7. Finn optimallösning med simplexmetoden för nätverk. Starta med Pettsons förslag. (2p)

c) Findus hittar en ny väg från nod 7 till nod 3. Hur lång får den vara om det ska vara lönsamt att använda den? (1p)

d) Pettson funderar på att bara ha nod 1 som lager. Butiken i nod 4 har uppvisat stor efterfrågan, så han undrar hur mycket man maximalt kan skicka från nod 1 till nod 4. Efter vissa funderingar ser han möjligheter att skicka 6 datorer vägen 1-7-6-5-4 och 5 datorer vägen 1-2-3-4. Är detta maximalt? Starta med denna lösning och finn maxflöde och minsnitt. Gör alla steg i metoden tydligt. (3p)

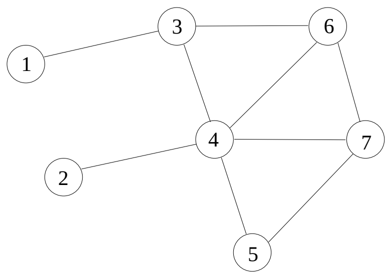
e) Om Pettson har sitt lager i nod 1, vill han för varje annan nod veta hur lång tid det tar att köra dit en dator. Ta fram dessa uppgifter med en lämplig optimeringsmetod. (2p)

Uppgift 5

Pettson bestämmer sig för att ha lager i både nod 1 och 2 (se uppgift 4). Han ska få en större sändning datorer och funderar på hur många som kan lagras i varje nod. Han vill maximera antal datorer i lager, men har vissa begränsningar pga utrymme mm. Om x_j är antal datorer som kan få plats i nod j, ges begränsningarna av $5x_1+8x_2 \leq 40$, $x_1 \leq 6$ och $x_2 \leq 6$. Han värdesätter datorerna något olika, och vill därför maximera $5x_1 + 4x_2$.

Lös detta linjära heltalsproblem med Land-Doig-Dakins trädsökningsmetod. Tvådimensionella LP-problem får lösas grafiskt. Ange lösning och målfunktionsvärde. (3p)

Uppgift 6



a) Man vill finna en maximal matchning i ovanstående graf. Starta med matchningen (3,4) och (5,7). Använd lämplig metod. (2p)

b) Man vill färga noderna så att två närliggande noder (dvs. som har en båge mellan sig) inte får samma färg, men vill använda så få färger som möjligt. Ange en övre och en undre gräns för antalet färger som behövs. (1p)