Matematiska institutionen
Optimeringslära

TENTAMEN

TAOP33/TEN 2
KOMBINATORISK OPTIMERING GRUNDKURS

Datum:	21 april 2017
Tid:	8.00-13.00
Hjälpmedel:	Miniräknare
	Kurslitteratur: Kaj Holmberg: *Optimering*
	Anteckningar i boken får förekomma.
Antal uppgifter:	6
Antal sidor:	6
	Uppgifterna är *inte* ordnade efter svårighetsgrad.
	Totalt antal poäng är 40. För godkänt krävs 16 poäng.
Examinator:	Kaj Holmberg
Jourhavande lärare:	Kaj Holmberg, tel 013-282867

Resultat meddelas per e-post

Tentamensinstruktioner

När Du löser uppgifterna

Redovisa dina beräkningar och din lösningsmetodik noga.
Motivera alla påståenden du gör.
Använd de standardmetoder som ingår i kursen.

Skriv endast på ena sidan av lösningsbladen. Använd inte rödpenna.
Behandla endast en huvuduppgift på varje blad.

Vid skrivningens slut

Sortera dina lösningsblad i uppgiftsordning.
Markera på omslaget vilka uppgifter du behandlat.
Kontrollräkna antalet inlämnade blad och fyll i antalet på omslaget.

Uppgift 1

Ludde ska göra konstverk med lysdioder och sälja dem på en loppmarknad. Han har 70 röda och 50 vita dioder, och har tagit fram tre möjliga konstruktioner. Den första konstruktionen kräver en röd och två vita dioder, den andra kräver en röd, och den tredje kräver tre vita. När han säljer dem blir vinsten 5 kr/st för den första konstruktionen, 2 kr/st för den andra och 4 kr/st för den tredje.

Han har tagit fram följande optimeringsmodell för att få reda på hur många av varje sort han ska göra för att maximera vinsten.

$$
\begin{array}{llrcrcrcrl}
\max & z = & 5x_1 & + & 2x_2 & + & 4x_3 & & & \\
\text{då} & & x_1 & + & x_2 & & & \leq & 70 & (1) \\
& & 2x_1 & & & + & 3x_3 & \leq & 50 & (2) \\
& & x_1, & & x_2, & & x_3 & \geq & 0 &
\end{array}
$$

a) Lös LP-problemet med simplexmetoden. Ange optimallösning och total vinst. Går alla lysdioder åt? (3p)

b) Formulera LP-dualen till problemet ovan, och lös den grafiskt. Kontrollera att duallösningen stämmer med det som kan ses i optimaltablån i uppgift a. Visa att komplementaritetsvillkoren är uppfyllda. (3p)

c) Antag att Ludde kan köpa en lysdiod till för 1 kr. Ska han göra det, och i så fall vilken färg? (Han vill fortfarande maximera vinsten.) (1p)

d) Vilken vinst skulle en konstruktion som använder en röd och en vit lysdiod behöva ge för att den ska vara lönsam att göra? (1p)

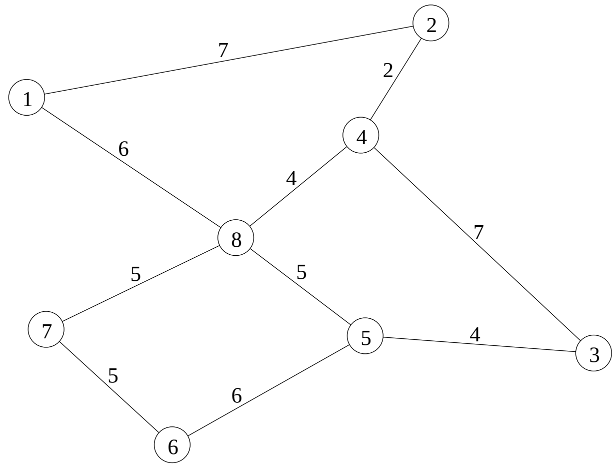
e) Ludde hittar på sjutton konstruktioner som använder tre olika färger på lysdioderna, och sätter upp motsvarande optimeringsmodell och löser den. Hur många olika konstruktioner kan han förvänta sig i optimallösningen, och varför? (1p)

f) Betrakta problemet i uppgift a. Ludde bestämmer sig för att göra sina konstverk i satser om 10. Det modellerar han genom att dividera högerleden med 10, och kräva att variablerna bara får anta heltalsvärden. (Variablerna står då för antal 10-tal.)

Lös detta linjära heltalsproblem med Land-Doig-Dakins trädsökningsmetod. Utnyttja LP-lösningen i uppgift a. Observera att det senast tillagda snittet alltid är aktivt, vilket betyder att en variabel kan fixeras. Tips: Förgrena över x_1 först. Ange lösning och målfunktionsvärde. (3p)

Uppgift 2

Nedanstående graf visar gatorna i den lilla byn Mestorp. Bågkoefficienterna anger länkarnas längd. (I verkligheten är gatorna i Mestorp mycket mer kurviga än grafen visar.)



a) Man ska äntligen asfaltera alla gator i Mestorp. Asfalteringsmaskinen rör sig mycket långsamt, även när den inte asfalterar, så man vill verkligen hitta den kortaste rundturen för maskinen. Vilket känt optimeringsproblem är detta? Finn en optimal lösning med lämplig metod. Ange vilka bågar som maskinen får köra två gånger på, samt en optimal rundtur. Är lösningen unik? (3p)

b) Betrakta problemet i uppgift a. Det visar sig att man måste köra två gånger på varje båge för att asfaltera den. Behöver man då köra någon tredje gång på någon båge? Motivera med allmänna argument, lös ej. (1p)

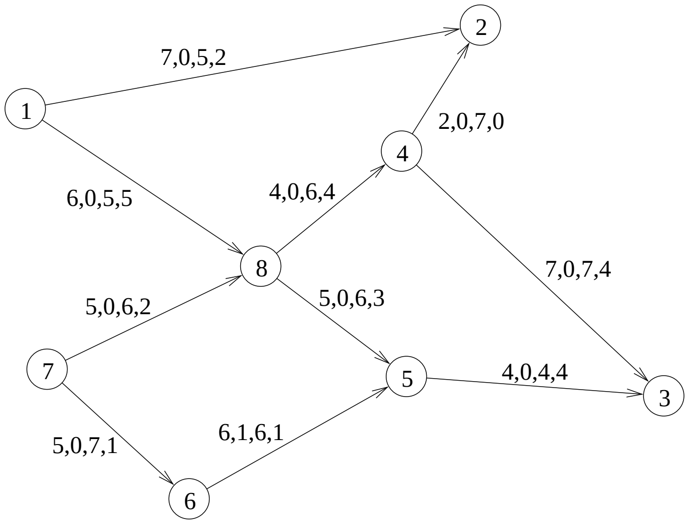
c) Innan man börjar asfaltera, kommer man på att man ska lägga spår i vägen, så att man senare ska kunna köra spårvagn i Mestorp. Det behöver inte gå spår längs alla vägar, men alla noder ska kunna nås. Det är dyrt att lägga spår, så man vill minimera den totala spårlängden. Hur ska spåren gå? Vilket känt optimeringsproblem är detta? Finn en optimallösning med lämplig metod. (2p)

d) Efteråt visar det sig att asfalteringsmaskinen har lämnat en hög med överbliven asfalt vid varje nod i grafen, och Efraim får i uppdrag att snabbt som ögat åka runt och ta bort dessa högar (innan de stelnar). Han vill givetvis åka den kortaste möjliga rundturen för att göra det. All överbliven asfalt ska läggas i nod 1. Vilket känt optimeringsproblem är detta? Finn en tillåten lösning med valfri heuristik. Beskriv heuristiken och ange komplexitet för den. Finn även en optimistisk uppskattning av det optimala målfunktionsvärdet och ange hur långt ifrån optimum den erhållna lösning kan vara. (3p)

Uppgift 3

Det finns många kor i Mestorp, och nu har bonden Göte (i nod 1) 7 fulla mjölkkrukor och Göta (i nod 7) har 3. Arla vill dock inte hämta dem där, utan vill hämta mjölken i nod 3. Olssons Ostkakeri i nod 2 vill dock ha två krukor, så 8 ska levereras till nod 3 och två till nod 2. Åkare Liselett ska förflytta mjölken och har begärt ett pris som är linjärt i avstånd och mängd.

Liselett tar fram en offert som innebär att mjölken förflyttas enligt det flöde som anges i grafen nedan. På varje båge anges kostnad per kruka, undre gräns för hur många som kan skickas där, övre gräns för hur många som kan skickas där, samt hur många som Liselett planerar att skicka där. (Liselett har av för oss okända skäl lovat att köra minst en pall på båge (6,5).)



a) Göte är lite misstänksam och vill själv kontrollera att det föreslagna flödet verkligen är det billigaste. Hjälp honom att göra det (mha. simplexmetoden för nätverk). Tips: Använd bl.a. båge (1,8) som basbåge. (2p)

b) Göta anser att vägen (6,5) bara kostar 4, inte 6. Skulle det förändra lösningen? Finn ny optimallösning med simplexmetoden för nätverk. Starta med flödet i uppgift a. (2p)

c) Utgå från det angivna flödet i nätverket ovan. Göte vill inte att något ska transporteras i båge (1,2) (för asfalteringen där har misslyckats). Hur mycket dyrare blir lösningen om man genomför den förändringen? Utnyttja information från uppgift 3a. (1p)

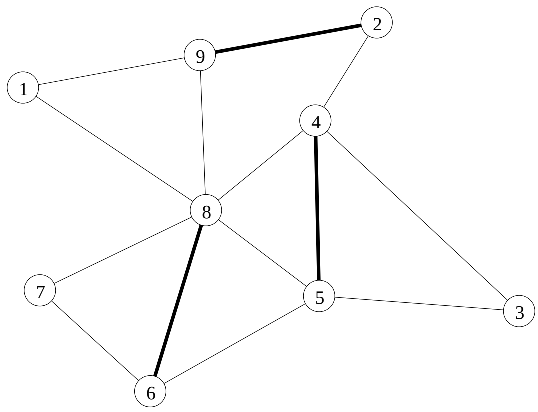
d) Göte funderar på att skaffa mer kor, och undrar därför hur många krukor man maximalt kan skicka från nod 1 till nod 3. Starta med flöde noll och finn maxflöde och minsnitt. Gör alla steg i metoden tydligt. Om Göte skulle utöka kapaciteten på en båge, vilken borde han välja? (3p)

e) Göta funderar på att börja med direktleveranser till de boende i Mestorp. Hon vill därför veta hur långt det är från nod 7 till alla andra noder. Ta fram denna information med lämplig optimeringsmetod. (2p)

Uppgift 4

Hushållen i Mestorp har bestämt sig för att gå ihop i par, som ett slags grannsamverkan, så att de kan hålla utkik efter eventuella inbrottstjuvar när grannarna är bortresta. Varje hushåll vill dock bara hålla koll på en granne, och man kräver att det går en båge mellan noderna i paren.

Hushållen i noderna 4 och 5 vill gärna bilda ett par. Detsamma gäller för de i nod 2 och 9 samt 6 och 8. Tyvärr innebär det att hushållen i noderna 1, 7 och 3 blir utan, och det gillar varken Göte eller Göta. (Tyvärr går det ingen båge mellan nod 1 och 7.) Vi har alltså situationen i figuren nedan, där de tjockare bågarna indikerar paren.



Man vill finna en parbildning, så att så många som möjligt av hushållen inkluderas. Vilket känt optimeringsproblem är detta? Finn en bättre parbildning med en lämplig metod. Starta med den givna. Är resultatet optimalt? (2p)

Uppgift 5

Roy och Roger ska laga fyra bilar, två var. De har uppskattat tiden det skulle ta för varje person att reparera varje bil, och den ges i matrisen nedan, där första raden står för Roy och den andra för Roger. Man vill fördela bilarna så att den totala arbetstiden minimeras.

$$C = \begin{pmatrix} 10 & 5 & 8 & 15 \\ 12 & 6 & 11 & 17 \end{pmatrix}$$

Lös problemet med ungerska metoden. Ledning: Duplicera raderna. Ange optimal lösning samt målfunktionsvärde. Ange även dual optimallösning och kontrollera starka dualsatsen. (3p)

Uppgift 6

Utgå från grafen i uppgift 4 (strunta i att vissa bågar är tjockare).

a) Finn ett sätt att färga korsningarna (noderna) med så få färger som möjligt, så att varje gata (båge) har två olika färger i sina ändnoder. Visa att lösningen är optimal med hjälp av en undre gräns. (2p)

b) Finn ett sätt att färga gatorna (bågarna) med så få färger som möjligt, så att två gator med samma färg aldrig går till samma korsning (nod). Visa att lösningen är optimal med hjälp av en undre gräns. (2p)