Matematiska institutionen
Optimeringslära

TENTAMEN

TAOP33/TEN 2
KOMBINATORISK OPTIMERING GRUNDKURS

Datum:	31 augusti 2018
Tid:	14.00-19.00
Hjälpmedel:	Miniräknare
	Kurslitteratur: Kaj Holmberg: *Optimering*
	Anteckningar i boken får förekomma.
Antal uppgifter:	9
Antal sidor:	8
	Uppgifterna är *inte* ordnade efter svårighetsgrad.
	Totalt antal poäng är 40. För godkänt krävs 16 poäng.
Examinator:	Kaj Holmberg
Jourhavande lärare:	Kaj Holmberg, tel 013-282867

Resultat meddelas per e-post

Tentamensinstruktioner

När Du löser uppgifterna

Redovisa dina beräkningar och din lösningsmetodik noga.
Motivera alla påståenden du gör.
Använd de standardmetoder som ingår i kursen.

Skriv endast på ena sidan av lösningsbladen. Använd inte rödpenna.
Behandla endast en huvuduppgift på varje blad.

Vid skrivningens slut

Sortera dina lösningsblad i uppgiftsordning.
Markera på omslaget vilka uppgifter du behandlat.
Kontrollräkna antalet inlämnade blad och fyll i antalet på omslaget.

Uppgift 1

Det är dags för det populära cykelloppet Blättern Runt. Ett i det närmaste ofattbart antal cyklister ska cykla de 36 milen runt sjön Blätttern, med start och mål i staden Mösala. Vid ett antal depåer ska cyklister få bullar, energidryck, saltgurka och blåbärssoppa (samt vatten, som är gratis) En årligt återkommande fråga är hur mycket man ska beställa av de olika varorna. Det är tråkigt om saker tar slut innan alla fått, men det är heller inte så kul att ha hundratals bullar kvar efteråt.

Arrangörerna sätter upp följande optimeringsmodell, där x_1 står för antal tusen bullar man beställer, x_2 antal tusen liter energidryck, x_3 antal ton saltgurka och x_4 antal tusen liter blåbärssoppa. Det första bivillkoret säger att man inte får överskrida sin budget, och de två följande att tillgången till saltgurka och blåbärssoppa är begränsad. (Bullar och energidryck kan man alltid få tag i mer av.) Målfunktionen bygger på hur uppskattade man tror att de olika varorna är av cyklisterna.

$$
\begin{array}{llrcrcrcrcrr}
\max & z = & 2x_1 & + & 3x_2 & + & x_3 & + & 4x_4 & & & \\
\text{då} & & 2x_1 & + & 6x_2 & + & 3x_3 & + & 5x_4 & \leq & 30 & (1) \\
 & & & & & & x_3 & & & \leq & 12 & (2) \\
 & & & & & & & & x_4 & \leq & 10 & (3) \\
 & & x_1, & & x_2, & & x_3, & & x_4 & \geq & 0 &
\end{array}
$$

a) Lös detta LP-problem med simplexmetoden. Ange optimal primallösning och duallösning samt målfunktionsvärde. Vilka bivillkor blir aktiva? Är optimallösningen unik? (3p)

b) Arrangörerna blir konfunderade av optimallösningen. De tycker inte alls att den är vettig, och bestämmer sig för att inte använda den. (Istället beställer man samma mängder som man gjorde förra året.) Vad är det för fel på lösningen? Vad är det för fel på modellen? Ge några förslag på hur man kunde modifiera modellen så att den skulle ge en mer realistisk lösning. Ange hur modellen kan lösas. (2p)

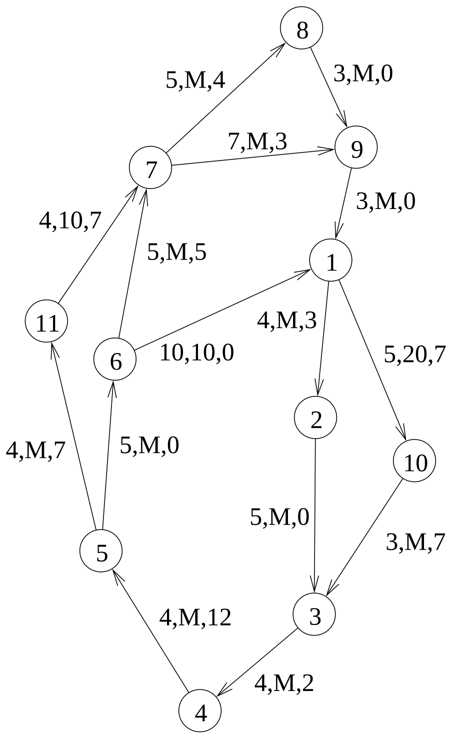
c) Utgå från optimallösningen i uppgift a. Ange för varje vara hur stor uppskattningen behöver vara för att varan ska komma med i optimallösningen (dvs. hur stor målfunktionskoefficienten behöver vara). (1p)

d) Utgå från optimallösningen i uppgift a. Ange för varje vara hur litet priset behöver vara för att varan ska komma med i optimallösningen (dvs. hur liten bivillkorskoefficienten i första bivillkoret behöver vara). (1p)

Uppgift 2

När man har beställt varorna, måste de köras ut till de olika depåerna. Nedanstående graf visar depåerna, samt de vägar man kan använda mellan dem. (I och med att det ligger en sjö i vägen är antalet vägar ganska begränsat.) Förutom vägarna som cyklisterna kör på (cykeln via noderna 1 - 9), så finns vissa alternativvägar, via nod 10 och 11, samt två tvärsövervägar, där båge (6,1) går via båt.

I nod 1 och nod 4 finns 10 ton bullar, och i nod 6 finns 5. Behoven är 3 i nod 2, 5 i nod 3, 5 i nod 5, 5 i nod 7, 4 i nod 8 och 3 i nod 9. På bågarna står kostnaden per ton, huvudsakligen baserad på avstånd och tid, samt hur mycket man maximalt kan köra den vägen (M betyder mycket stor kapacitet).



a) Det hela blir ett minkostnadsflödesproblem, och man har löst problemet. På bågarna står till sist optimalt flöde. Visa att lösningen är optimal. (2p)

b) Utgå från lösningen i uppgift a. Man kommer på att båten som går tvärs över Blättern, båge (6,1), faktiskt kan gå åt andra hållet också. Inför bågen (1,6) med samma data som båge (6,1), dvs. kostnad 10 och kapacitet 10. Ändras optimallösningen? Om så är fallet, beräkna en ny optimallösning. (2p)

Uppgift 3

När loppet går, visar det sig vara motvind och mycket varmare än vanligt, så många cyklister bryter loppet vid olika depåer. Arrangörerna kör runt bussar som plockar upp dessa cyklister och transporterar dem till Mösala.

Finn billigaste väg från varje depå (nod 2 - 9) till Mösala (nod 1) med de bågkostnader som anges i nätverket i uppgift 2. Bågarna kan nu betraktas som oriktade. Ange avståndet (i den sort bågkostnaderna i nätverket anger) från varje depå till målet, vilket ger ett mått på hur länge en cyklist från en viss depå behöver sitta i bussen. (3p)

Uppgift 4

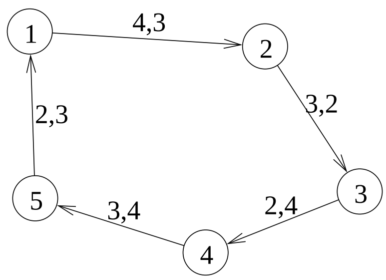
Man använder sig av ett antal följebilar som hjälper cyklister som får problem längs vägen. Man måste i förväg bestämma hur många. Det finns två sorters bilar, dels normala personbilar och dels lite större skåpbilar. De kostar olika mycket att använda, men ger också olika nytta. Om man låter x_1 ange hur många bilar av första sorten man ska använda och x_2 hur många bilar av andra sorten, kan man formulera ett optimeringsproblem.

Varje bil av sorten 1 kostar 10 tkr, och varje bil av sorten 2 kostar 15 tkr, och man har inte mer än 100 tkr att använda för bilar. Det finns inte mer än 7 bilar av sort 1 och 5 av sort 2. Man vill maximera nyttan av bilarna, och det har man uppskattat till 5 per bil av sort 1 och 7 per bil av sort 2.

Lös problemet med Land-Doig-Dakins trädsökningsmetod. Tvådimensionella LP-problem får lösas grafiskt. Ange lösning och målfunktionsvärde. (3p)

Uppgift 5

Man har introducerat ett nytt lopp, Elblättern, där elcykel är tillåtet. Maiken från Malmslätt ska köra loppet. Loppet är 14 mil långt och på Maikens elcykel tar batteriet slut efter 5 mil. Hon funderar på vilka sträckor hon ska köra på el och vilka hon ska trampa manuellt. Hon ändrar bara inställning i depåerna. På bågarna i grafen nedan står först längden av varje sträcka i mil, och sedan en uppskattning av värdet för Maiken att köra på el den sträckan.



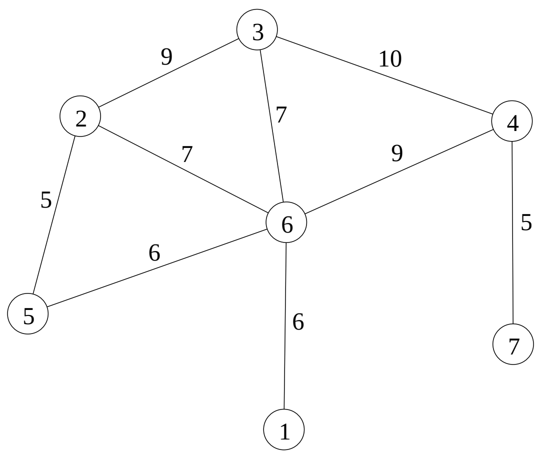
a) Formulera problemet som ett kappsäcksproblem, med variablerna $x_j = 1$ om avsnitt j ska köras på el, 0 om inte. (1p)

b) Lös LP-relaxationen av kappsäcksproblemet i uppgift a, med hjälp av LP-dualitet. (2p)

c) Finn en tillåten heltalslösning med avrundning, och ange hur mycket sämre den i värsta fall är än optimallösningen. (1p)

Uppgift 6

Staden Mösala, med start och mål för Blättern runt, har stora parkeringsproblem då loppet går. Flera tusen bilar (mer än vanligt) riskerar då att korka igen gatorna fullständigt. De styrande inrättar därför nya parkeringsplatser då loppet går, och stänger temporärt av vissa gator. Ett krav är dock att man från varje parkeringsplats ska kunna ta sig till starten (vilket också är målet). Man vill också att det finns ett sätt att ta sig mellan varje parkeringsplats. (Vägarna behöver dock inte gå direkt, utan kan gå via andra noder.) Nedanstående graf avbildar det resulterande nätverket efter avstängningar. Nod 1 är start/mål och de andra noderna är parkeringsplatser. På bågarna står uppskattad tid för att köra sträckan.

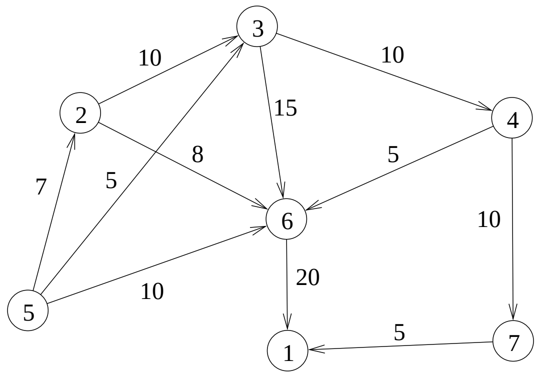


a) Man undrar för det första om det är möjligt att ta sig mellan varje par av platser. Vilken känd grafegenskap vill man då kontrollera? Om det finns flera alternativ, vill man styra trafiken med hjälp av vägskyltar till vissa gator, så att den totala tiden för de utvalda gatorna är minimal. Vilket optimeringsproblem är det? Lös problemet. (Använd en metod som skulle fungera bra för en stor graf.) (3p)

b) Man inför extra stadsbussar som ska köra en rundtur via alla platser (noder) i grafen, för att forsla människor mellan de olika platserna. Man vill att rundturen ska ta så lite tid som möjligt, så att folk väljer att ta bussen istället för att köra själv. Vilket känt optimeringsproblem är det att finns den snabbaste rundturen? Observera att det är tillåtet att besöka noder flera gånger, om det är nödvändigt. Finn en bra lösning med en känd heuristik. Finn även en undre gräns för det optimala målfunktionsvärdet genom att lösa en relaxation av problemet. Ange hur långt ifrån optimum den erhålla lösningen i värsta fall är.

Frivillig ledning: Om delar av grafen bara kan behandlas på ett sätt, kan man eliminera dessa delar, lösa problemet utan dem, och sedan lägga till dem. (3p)

c) Man vill även ta reda på hur många bilar som maximalt kan ta sig från huvudinfarten (nod 5) till starten/målet (nod 1), om man öppnar några fler gator. Övre gränser på antal bilar per timme ges i grafen nedan. Man vill även veta vilka gator det är som begränsar trafiken, eftersom att utbyggnad på någon av dem kanske skulle kunna ge bättre genomflöde.



Lös problemet med standardmetod. Visa varje steg i metoden tydligt. (3p)

Uppgift 7

Vissa cyklister vill köra ihop i grupper. Ett krav för att det ska fungera är dock att alla i en grupp cyklar ungefär lika fort. En större cykelklubb, Cymer, har ett antal personer som ska köra, och bestämmer sig för att sätta ihop så bra grupper som möjligt. Man vill gärna bilda så få grupper som möjligt.

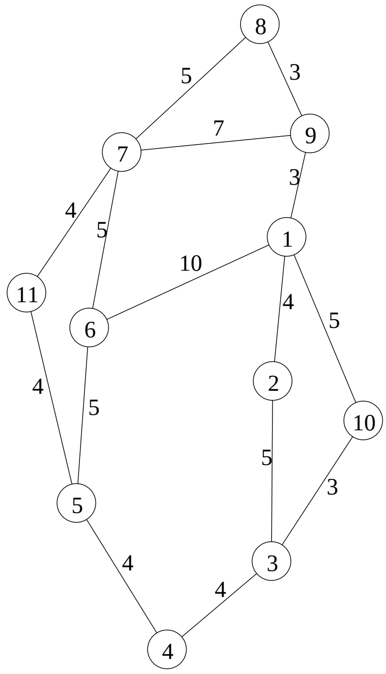
Man konstruerar en oriktad graf som visar relationerna mellan cyklisterna. Noderna motsvarar personer, och en båge betyder att de två cyklisterna troligen kommer att köra ungefär lika snabbt. Man vill välja ut vissa bågar som motsvarar att de två cyklisterna kör i samma grupp.

a) Förklara i graftermer vad det är för lösning man är ute efter. (1p)

b) Förklara vad följande egenskaper/begrepp betyder när det gäller möjliga grupperingar, och om de överhuvudtaget kan förekomma. (Vi antar att det är fler tre cyklister totalt.) (3p)
1. Grafen är fullständig.
2. Grafen består av tre ej sammanhängande klickar.
3. Grafen är en matchning.
4. Grafen är ett träd.
5. Grafen är en Hamiltoncykel.

Uppgift 8

Efter lopper behöver man inspektera alla bågarna i grafen, för att se om cyklisterna har kastat skräp, och i så fall plocka upp det. Man vill göra det i en rundtur som börjar och slutar i nod 1, och som är så kort som möjligt. Eftersom cyklisterna inte åkte via nod 10 och 11, behöver man inte undersöka bågarna som går till dessa noder. Dock kan det finnas skräp längs bågarna (6,1) och (7,9). Vilket optimeringsproblem blir detta? Finn en optimallösning till problemet. Beskriv stegen i metoden noggrant. Ange rundtur och total tid. Vilka bågar ska köras mer än en gång? (3p)



Uppgift 9

Det finns många frivilliga som hjälper till med evenemanget. Det ska delas ut nummerlappar, kontrollera nummerlappen vid start, ge cyklister medalj vid målgång, dela ut bullar vid depåer, vinka cyklisterna är rätt håll vid vägkorsningar etc. Olika personer är olika bra på olika uppgifter, bl.a. beroende på stresstålighet, vädertålighet etc. För att finna bästa tilldelningen kan man sätta upp en matris med förväntas “kostnad” för att låta person i göra uppgift j, och sedan finna tilldelningen som minimerar totalkostnaden. Det riktiga problemet har tusentals personer och uppgifter, så här löser vi nedanstående mindre problem.

$$C = \begin{pmatrix} 5 & 5 & 6 & 7 & 4 \\ 6 & 6 & 7 & 8 & 5 \\ 6 & 7 & 8 & 9 & 5 \\ 7 & 5 & 4 & 5 & 3 \\ 5 & 4 & 5 & 6 & 5 \end{pmatrix}$$

Lös problemet med ungerska metoden. Ange optimal lösning samt målfunktionsvärde. Ange även dual optimallösning och kontrollera starka dualsatsen. (3p)