Matematiska institutionen
Optimeringslära

TENTAMEN

TAOP33/TEN 2
KOMBINATORISK OPTIMERING GRUNDKURS

Datum:	30 augusti 2019
Tid:	14.00-19.00
Hjälpmedel:	Miniräknare
	Kurslitteratur: Kaj Holmberg: *Optimering*
	Anteckningar i boken får förekomma.
Antal uppgifter:	8
Antal sidor:	7
	Uppgifterna är *inte* ordnade efter svårighetsgrad.
	Totalt antal poäng är 40. För godkänt krävs 16 poäng.
Examinator:	Kaj Holmberg
Jourhavande lärare:	Kaj Holmberg, tel 013-282867

Resultat meddelas per e-post

Tentamensinstruktioner

När Du löser uppgifterna

Redovisa dina beräkningar och din lösningsmetodik noga.
Motivera alla påståenden du gör.
Använd de standardmetoder som ingår i kursen.

Skriv endast på ena sidan av lösningsbladen. Använd inte rödpenna.
Behandla endast en huvuduppgift på varje blad.

Vid skrivningens slut

Sortera dina lösningsblad i uppgiftsordning.
Markera på omslaget vilka uppgifter du behandlat.
Kontrollräkna antalet inlämnade blad och fyll i antalet på omslaget.

Uppgift 1

FröKen AB ska sälja fröer i påsar, och har kommit på att det troligen vore smart att sälja påsar med blandade fröer. De har tre olika sorters frön, och har konstruerat följande blandningar:
1. 100 frön av sort A, 100 frön av sort B och 200 frön av sort C. Vinst: 8.
2. 200 frön av sort A och 200 frön av sort B. Vinst: 15.
3. 400 frön av sort A. Vinst: 12.
4. 200 frön av sort B och 200 frön av sort C. Vinst: 10.
Det finns endast 1000 frön av sort A, 700 frön av sort B och 800 frön av sort C.

FröKen formulerar följande linjära optimeringsproblem, där x_j står för hur många påsar av sort j de ska göra. (Alla bivillkorskoefficienter har dividerats med 100.)

$$\begin{array}{llrcrcrcrcrl}
\max & z = & 8x_1 & + & 15x_2 & + & 12x_3 & + & 10x_4 & & & \\
\text{då} & & x_1 & + & 2x_2 & + & 4x_3 & & & \leq & 10 & (1) \\
& & x_1 & + & 2x_2 & & & + & 2x_4 & \leq & 7 & (2) \\
& & 2x_1 & & & & & + & 2x_4 & \leq & 8 & (3) \\
& & x_1, & & x_2, & & x_3, & & x_4 & \geq & 0 &
\end{array}$$

a) Lös detta LP-problem med simplexmetoden. Ange optimal primallösning och duallösning samt målfunktionsvärde. Vilka bivillkor blir aktiva (dvs. blir det några frön över)? (3p)

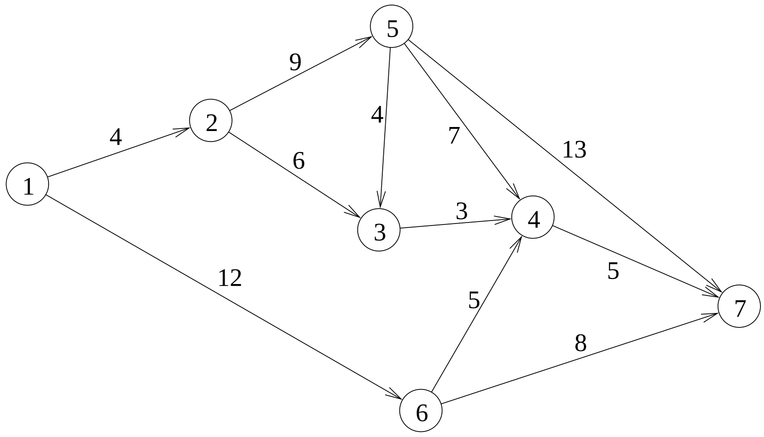
b) Utgå från optimallösningen i uppgift a. Om FröKen skulle köpa några frön till av en sort, vilken sort skulle de tjäna mest på? (1p)

c) Utgå från optimallösningen i uppgift a. Man funderar på en ny påse, med 150 frön av sort A och 75 frön av sort B och 75 frön av sort C. Vad skulle vinsten behöva vara för den påsen för att den skulle kunna förbättra lösningen? (1p)

d) Formulera LP-dualen till LP-problemet och visa att den duala lösningen i uppgift a är tillåten. (2p)

Uppgift 2

Snackademiska Hus AB ska bygga ett nytt Studenthus till universitetet i den lilla staden Myköping. Innan bygget av det nya huset påbörjas, ska det gamla huset, Koordinaten, i sin helhet förflyttas till Gamla Myköping, där man samlar alla gamla hus (värda att spara). Följande graf visar möjliga transportvägar, där nod 1 är det gamla husets ursprungliga position, och nod 7 platsen i Gamla Myköping där huset ska placeras. Huset flyttas långsamt med ett stort fordon, och gatorna måste stängas av när de används. På bågarna står transporttiden (i timmar) för varje gata. Man vill givetvis genomföra flytten så snabbt som möjligt. Vilken väg ska man välja?



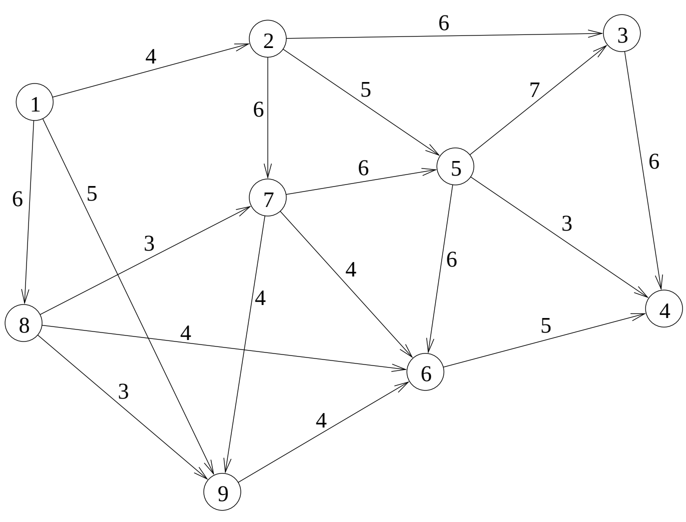
a) Vilket optimeringsproblem blir detta? Finn en optimallösning till problemet. Beskriv stegen i metoden noggrant. Ange väg och total tid. (2p)

b) Utgå från lösningen i uppgift a. Man kan bygga en temporär väg från nod 3 till nod 6. Hur mycket får det kosta om lösningen ska bli bättre? Man värderar en timme i transporttid till 1000 kr i byggkostnad. Motivera med nodpriser. (1p)

Uppgift 3

Under tiden Studenthuset byggs måste flera vägar och platser stängas av. Detta kommer att påverka framkomligheten för många av de studenter som dagligen cyklar mellan bostadsområdet Syd och universitetet. Man studerar morgontrafiken, där uppskattningsvis 1200 studenter ska ta sig från Syd till MyU (Myköpings Universitet).

I följande graf anges samtliga relevanta vägar och på dem en uppskattning av hur många cyklister som maximalt kan färdas den vägen (i hundratal). Nod 1 är Syd och nod 4 MyU.



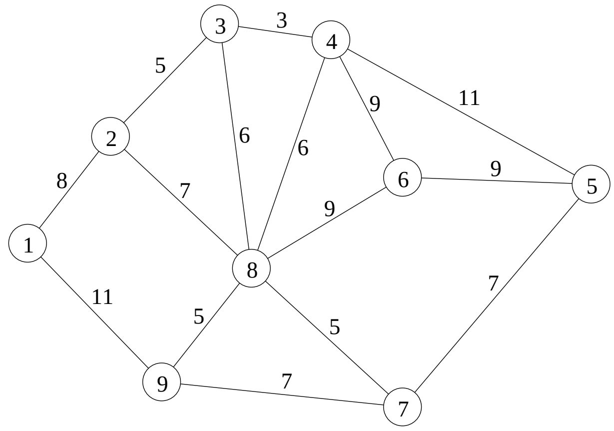
Vid byggnationen planerar man att stänga av korsningen vid nod 7, dvs. inget flöde får passera denna nod, samt stänga av bågarna (2,3) och (8,9). Man vill under dessa förhållanden beräkna maxflöde från nod 1 till nod 4, samt finna minsnittet.

a) Lös problemet med standardmetod. Visa varje steg i metoden tydligt. Ange minsnitt. (3p)

b) Man kan utöka kapaciteten temporärt på en av (de ej avstängda) vägarna under byggnationen. Ge ett motiverat förslag på vilken väg man ska välja. (1p)

Uppgift 4

Inför byggstarten ska man sätta upp informationslappar om avstängningar vid alla noder i följande graf. Njema Problema, allt-i-allo på Snackademiska Hus, får detta uppdrag. Njema börjar och slutar rundturen i nod 1, och tänker jogga runt med lapparna i en ryggsäck. På bågarna står joggningstid (vilket är proportionellt mot avståndet). Njema vill göra rundturen så kort/snabb som möjligt.



a) Vilket känt optimeringsproblem är det att finns den bästa rundturen? Finn en bra lösning med en känd heuristik. Finn även en undre gräns för det optimala målfunktionsvärdet genom att lösa en relaxation av problemet. Ange hur långt ifrån optimum den erhålla lösningen i värsta fall är. (3p)

b) Njema kommer på att det är nyttigt att jogga, och vill därför inte alls ta den kortaste rundturen, utan den längsta. Det ska fortfarande vara en cykel som besöker varje nod en gång. Hur kan man lösa detta optimeringsproblem? Svara genom att beskriva en enkel modifiering av problemet eller av standardmetoden. (1p)

Uppgift 5

Snackademiska Hus ska hyra in ett antal kranar för att lyfta saker under byggnationen av det nya Studenthuset. Det finns två olika sorters kranar, med olika kapacitet och kostnad. Låt x_j ange hur många kranar av sort j man hyr in. Man vill maximera total lyftkapacitet under bivillkoret att kostnaden inte överstiger den budgeterade, vilket leder till följande linjära heltalsproblem.

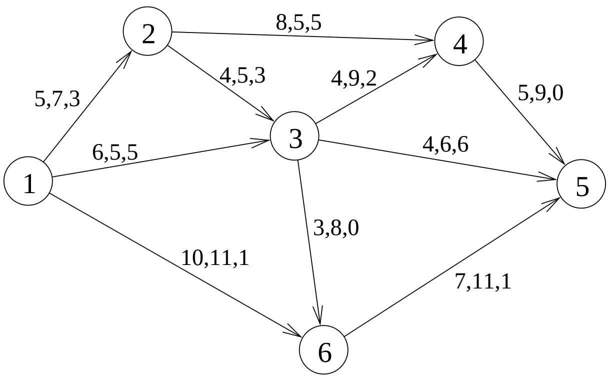
$$\begin{array}{lll} \max & z = & 10x_1 + 15x_2 \\ \text{då} & & 4x_1 + 7x_2 \leq 22 \\ & & x_1, x_2 \geq 0, \text{heltal} \end{array}$$

a) Lös problemet med Land-Doig-Dakins metod. LP-problem får lösas grafiskt. Ledning: Dividera målfunktionskoefficienterna med 5. (3p)

b) Blir det jobbigare att lösa problemet om man inte följer ledningen i uppgift a? (Lös ej om problemet.) (1p)

Uppgift 6

Vid ett tillfälle behöver Snackademiska Hus förflytta ett större antal takpannor från sina lager till byggarbetsplatser, och man vill givetvis göra det så billigt som möjligt. Möjliga vägar ges i följande graf. Det finns just nu 10 pallar med takpannor i nod 1 och 5 i nod 2. Man behöver 7 i nod 4 och 7 i nod 5. Man räknar med linjära transportkostnader, och bågarna i grafen är märkta med kostnad per pall, samt en övre gräns för hur mycket som kan skickas den vägen. Dessutom anges ett förslag på flöde, dvs. hur man skulle kunna skicka pallarna, framräknat av Njema.



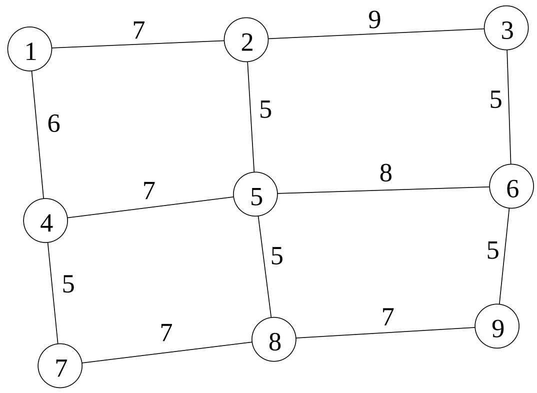
a) Det hela blir ett obalanserat minkostnadsflödesproblem, dvs. total källstyrka är större än total sänkstyrka. Alla pallarna i nod 1 och 2 kommer inte att skickas. Modifiera nätverket så att det blir balanserat, genom att ta hand om överskottet på ett lämpligt sätt. (1p)

b) Visa att den föreslagna lösningen är optimal. (2p)

c) Utgå från lösningen i uppgift a. En underleverantör erbjuder sig att frakta pallar från nod 3 till nod 6 helt utan kostnad. Ändras optimallösningen? Om så är fallet, beräkna en ny optimallösning. (2p)

Uppgift 7

a) Följande graf föreställer korridorerna i det av Snackademiska Hus nybyggda Studenthuset. Nu ska man planera den dagliga städningen av korridorerna. (Det vore dumt att inte städa det nya huset ordentligt.) Man kan placera sopmaskinen i vilken nod som helst, men den måste alltid återvända till denna nod, när den sopat färdigt. På varje båge i grafen står tiden det tar att sopa den. Man vill att sopningen ska vara färdig så tidigt som möjligt. (Maskinen kör lika fort när den sopar som när den inte gör det.)



Vilket optimeringsproblem blir detta? Finn en optimallösning till problemet. Beskriv stegen i metoden noggrant. Ange rundtur och totalt avstånd. Vilka korridorer kommer att passeras mer än en gång? (3p)

b) Man ska ha tentor i Studenthuset, och ska placera ut tentavakter i noderna, så att alla korridorer övervakas. En vakt i en nod kan övervaka samtliga bågar som ansluter till noden. Man vill minimera antalet tentavakter. Vilket känt optimeringsproblem är detta? Är problemet NP-fullständigt? Finn en bra lösning med en lämplig heuristik. (2p)

c) Man bestämmer sig för att göra på ett annat sätt med tentavakterna. Nu är det noderna som ska övervakas. Man börjar med att placera ut en vakt mitt i varje korridor, som kontrollerar båda noderna som ansluter till bågen. Därefter tar man bort vakter som inte behövs, dvs. där båda noderna redan är övervakade av andra vakter. Alla noder ska fortfarande vara övervakade av minst en vakt.

Betrakta nu bågarna där vakter tas bort. Vilken känd grafstruktur bildar de? Vilket känt optimeringsproblem är det att ta bort så många vakter som möjligt? Finn en bra lösning med en lämplig heuristik. (2p)

d) Man ska måla alla noder med färger, så att varje båge har två olika färger på sina ändnoder, men vill använda så få färger som möjligt. Hur många färger behövs? Motivera. (1p)

e) Man ska måla alla bågar med färger, så att de bågar som ansluter till samma nod har olika färger, men vill använda så få färger som möjligt. Hur många färger behövs? Motivera. (1p)

Uppgift 8

Den lilla staden Myköping ska bygga ett nytt häftigt bostadsområde, Ballastaden. Man planerar fem olika hus, och eftersom de ska byggas samtidigt och vara väldigt olika, ska de byggas av fem olika byggföretag. Man har tagit in offerter från varje företag om varje hus, och kostnaderna ges i matrisen nedan (rader motsvarar byggföretag och kolumner hus). Man vill helt enkelt finna den tilldelning av byggföretag till hus som minimerar totalkostnaden.

$$C = \begin{pmatrix} 5 & 7 & 5 & 7 & 8 \\ 9 & 8 & 7 & 8 & 7 \\ 7 & 8 & 8 & 9 & 5 \\ 5 & 5 & 4 & 2 & 5 \\ 8 & 9 & 6 & 4 & 6 \end{pmatrix}$$

a) Lös problemet med ungerska metoden. Ange optimal lösning samt målfunktionsvärde. Ange även dual optimallösning och kontrollera starka dualsatsen. (3p)

b) Den svaga kronkursen gör de lettiska byggarbetarna dyrare, så alla kostnader i rad 4 ökar med 2. Kommer detta att förändra den primala optimallösningen? Kommer detta att förändra den duala optimallösningen? (Lös inte om.) (1p)