Matematiska institutionen
Optimeringslära

TENTAMEN

TAOP33/TEN 2
KOMBINATORISK OPTIMERING GRUNDKURS

Datum:	21 oktober 2019
Tid:	8.00-13.00
Hjälpmedel:	Miniräknare
	Kurslitteratur: Kaj Holmberg: *Optimering*
	Anteckningar i boken får förekomma.
Antal uppgifter:	9
Antal sidor:	8
	Uppgifterna är *inte* ordnade efter svårighetsgrad.
	Totalt antal poäng är 40. För godkänt krävs 16 poäng.
Examinator:	Kaj Holmberg
Jourhavande lärare:	Kaj Holmberg, tel 013-282867

Resultat meddelas per e-post

Tentamensinstruktioner

När Du löser uppgifterna

Redovisa dina beräkningar och din lösningsmetodik noga.
Motivera alla påståenden du gör.
Använd de standardmetoder som ingår i kursen.

Skriv endast på ena sidan av lösningsbladen. Använd inte rödpenna.
Behandla endast en huvuduppgift på varje blad.

Vid skrivningens slut

Sortera dina lösningsblad i uppgiftsordning.
Markera på omslaget vilka uppgifter du behandlat.
Kontrollräkna antalet inlämnade blad och fyll i antalet på omslaget.

Uppgift 1

Diodrik ska sälja små olikfärgade lysdioder (led) i påsar, och har kommit på att det troligen vore smart att sälja påsar med blandade färger. Det finns tre olika färger, och han har konstruerat följande blandningar:
1. 10 röda, 10 gröna och 20 gula. Vinst: 5.
2. 20 röda och 20 gröna. Vinst: 4.
3. 40 gula. Vinst: 4.
4. 20 gröna och 20 gula. Vinst: 4.

Han har 100 röda, 80 gröna och 80 gula dioder.

Diodrik formulerar följande linjära optimeringsproblem, där x_j står för hur många påsar av sort j han ska göra. (Alla bivillkorskoefficienter har dividerats med 10.) (I denna uppgift struntar vi i heltalskrav.)

$$\begin{array}{llrcrcrcrcrr}
\max & z = & 5x_1 & + & 4x_2 & + & 4x_3 & + & 4x_4 & & & \\
\text{då} & & x_1 & + & 2x_2 & & & & & \leq & 10 & (1) \\
& & x_1 & + & 2x_2 & & & + & 2x_4 & \leq & 8 & (2) \\
& & 2x_1 & & & + & 4x_3 & + & 2x_4 & \leq & 8 & (3) \\
& & x_1, & & x_2, & & x_3, & & x_4 & \geq & 0 &
\end{array}$$

a) Lös detta LP-problem med simplexmetoden. Ange optimal primallösning och duallösning samt målfunktionsvärde. Vilka bivillkor blir aktiva (dvs. blir det några dioder över)? (3p)

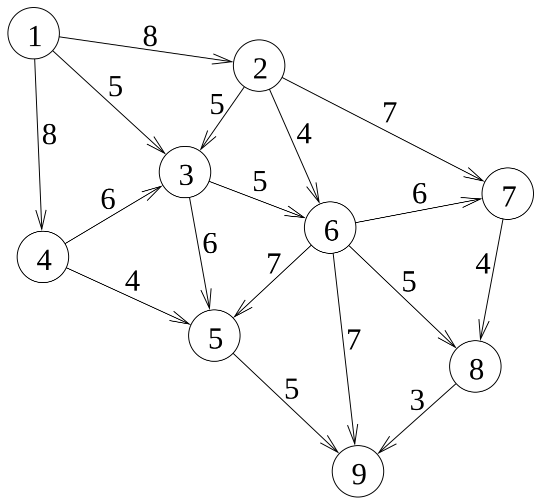
b) Utgå från optimallösningen i uppgift a. Om Diodrik skulle köpa några dioder till av en färg, vilken färg skulle han tjäna mest på? (1p)

c) Utgå från optimallösningen i uppgift a. Han funderar på en ny påse, med 15 röda, 15 gröna och 10 gula. Vad skulle vinsten behöva vara för den påsen för att den skulle kunna förbättra lösningen? Ändras slutsatsen om han skulle snåla lite och minska antalet röda i nya påsen till 10? (1p)

d) Formulera det duala bivillkoret som motsvarar den nya variabeln i uppgift c. Stoppa in den duala lösningen och visa att resultatet verifierar svaret i uppgift c. (1p)

Uppgift 2

Linolf och Linnea ska lifta till Lissabon i Portugal. De funderar på vilken väg de ska välja, och konstruerar följande nätverk, där nod 1 är startpunkten (Mellanköping), och nod 9 är Lissabon. Bågarna är märkta med uppskattad restid (lite omskalat), och noderna är platser där kan kan tänka sig stanna en stund. Man vill finna en väg med minimal restid.

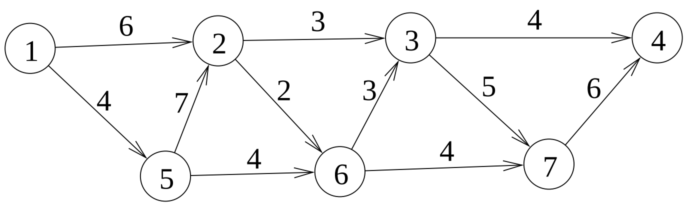


a) Vilket optimeringsproblem blir detta? Finn en optimallösning till problemet. Beskriv stegen i metoden noggrant. Ange väg och total restid. (2p)

b) De ändrar sig och vill åka till Madrid i Spanien (nod 8) istället. Ange snabbaste väg dit från Mellanköping (utan att lösa om problemet). (1p)

Uppgift 3

Snackademiska Hus AB har byggt ett nytt Studenthus åt MeU (Mellanköpings universitet) och flödet av cyklar förbi platsen har ändrats. Det har uppstått en improviserad cykelparkering, så att det blir svårare att ta sig förbi. Vid vissa tider blir det fullt av cyklister, och nästan stopp, vilket irriterar studenter som riskerar att komma försent. Man bestämmer sig för att utreda frågan. Man konstruerar ett nätverk som visar det möjliga vägarna cyklister kan ta, och gör en bedömning av hur många cyklister per minut som högst kan passera genom varje länk i nätverket. Därefter vill man finna det maximala flöde som kan passera från nod 1 till nod 4. Man är egentligen mest intresserad av minsnittet, dvs. vilka vägar som begränsar maxflödet. Kapaciteten på dessa kan kanske byggas ut och därmed öka genomströmningen.



Lös problemet med standardmetod. Visa varje steg i metoden tydligt. Ange minsnitt. Ge ett välmotiverat förslag på vilken väg man borde öka kapaciteten på. (4p)

Uppgift 4

Snackademiska Hus ska installera luftkonditioneringsapparater i sitt nybyggda Studenthus. Det finns två olika sorter, med olika kapacitet och kostnad. Låt x_j ange hur många apparater av sort j man installerar. Man vill maximera total kapacitet under bivillkoret att kostnaden inte överstiger den budgeterade, vilket leder till följande linjära heltalsproblem.

$$\begin{array}{lrl} \max & z = & 3x_1 + 5x_2 \\ \text{då} & & 7x_1 + 9x_2 \leq 20 \\ & & x_1, x_2 \geq 0, \text{heltal} \end{array}$$

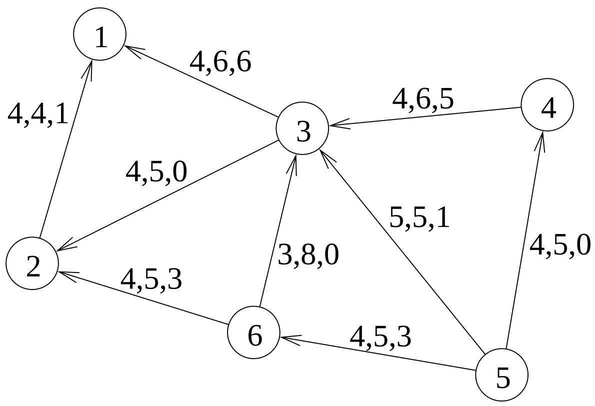
a) Lös problemet med Land-Doig-Dakins metod. LP-problem får lösas grafiskt. (3p)

b) Hur mycket skulle man behöva öka budgeten för att få en bättre lösning? Finn svaret genom att studera problemet grafiskt. (1p)

Uppgift 5

Mellanköping har infört ett system med elcyklar som man kan hyra. Cyklarna förvaras vid ett antal laddningsstationer, där man kan hämta och lämna dem. Det visar sig dock att cyklarna till slut hamnar på fel plats, eftersom det är större efterfrågan på resor från vissa platser, t.ex. Centralstationen. Man måste därför flytta tillbaka cyklarna då och då. Detta görs med specialbyggda lastbilar, och man vill göra detta på billigaste sätt.

Vi betraktar en situation i nedanstående nätverk, där man nu har 5 cyklar i nod 4, 5 cyklar i nod 5 och inga i nod 1 och 2. Man vill nu ha 7 cyklar i nod 1 och 2 i nod 2. På bågarna står först kostnaden att transportera en cykel, sedan en övre gräns för hur många som kan transporteras den vägen, och till sist antal transporterade cyklar som räknats fram av konsultbyrån MellanOpt. Man räknar med linjära kostnader och beaktar inte hur bilarna kör mellan transporterna, utan bara hur de kör när de är lastade med cyklar.



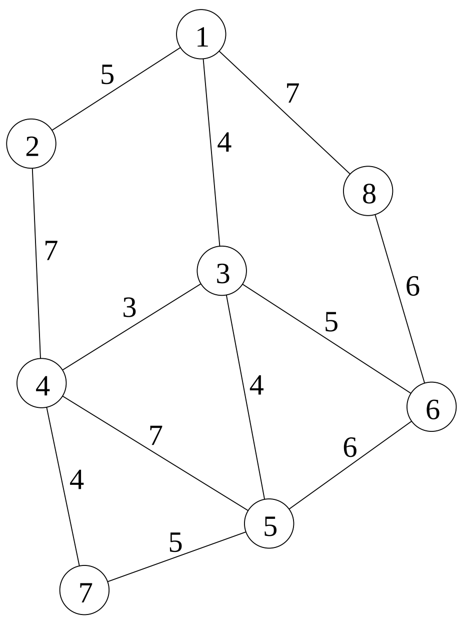
a) Det hela blir ett obalanserat minkostnadsflödesproblem, dvs. total källstyrka är större än total sänkstyrka. Alla cyklar i nod 4 och 5 kommer inte att flyttas. Modifiera nätverket så att det blir balanserat, genom att ta hand om överskottet på ett optimalt sätt. (1p)

b) Visa att den föreslagna lösningen är optimal. (2p)

c) Utgå från lösningen i uppgift b. Om man tillåter lastbilarna med cyklar att använda bussfilerna, minskas vissa transportkostnader, nämligen c_{54} ändras från 4 till 2, och c_{32} ändras från 4 till 2. Ändras optimallösningen? Om så är fallet, beräkna en ny optimallösning. (2p)

Uppgift 6

Följande graf föreställer cykelvägarna genom skogen mellan universitetet i Mellanköping, MeU, och bostadsområdet Villa där många studenter bor. Det är höst och mängder av löv har fallit ner på vägarna, och gjort dem mycket hala för cyklister. Man ska nu sopa bort löven, och har avdelat en maskin till jobbet. Maskinen står i nod 1 och ska köra en rundtur så att den åter hamnar i nod 1 när den har sopat alla vägar. På varje båge i grafen står tiden det tar att sopa den. Man vill att sopningen ska vara färdig så tidigt som möjligt. (Maskinen kör lika fort när den sopar som när den inte gör det.)

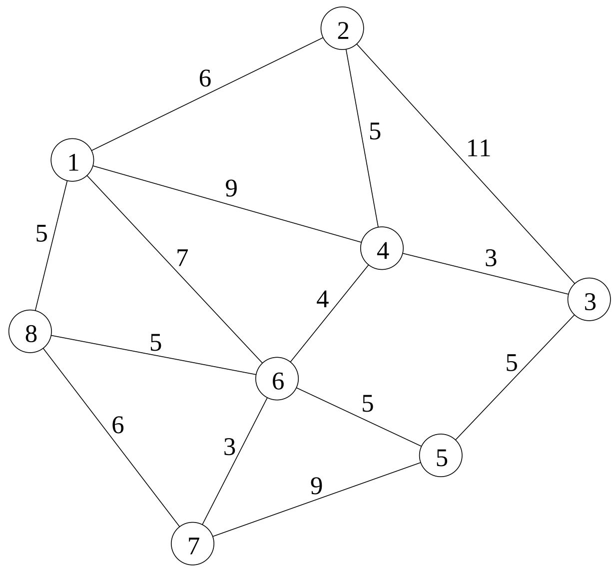


a) Vilket optimeringsproblem blir detta? Finn en optimallösning till problemet. Beskriv stegen i metoden noggrant. Ange rundtur och totalt avstånd. Vilka vägar kommer att passeras mer än en gång? (3p)

b) Antag att maskinen kör dubbelt så snabbt när den inte sopar. Hur förändras optimallösningen? (1p)

Uppgift 7

Ett antal sopmaskiner har nu sopat upp alla höstlöv i staden Mellanköping (se föregående uppgift) och varje maskin har lagt de uppsamlade löven i en hög där maskinens rundtur slutade. Nu ska man samla ihop lövhögarna, och har avdelat en lastbil till detta. Följande graf visar möjliga vägar mellan lövhögarna (som ligger i nod 2 - 8) och återvinningsstationen (i nod 1) dit alla löv ska lämnas. Lastbilen är stor nog att få med alla löv på en gång, så man vill finna den snabbaste rundturen som besöker alla noder. På bågarna står körtid.



Vilket känt optimeringsproblem är det att finns den bästa rundturen? Finn en bra lösning med en känd heuristik. Finn även en undre gräns för det optimala målfunktionsvärdet genom att lösa en relaxation av problemet. Ange hur långt ifrån optimum den erhålla lösningen i värsta fall är.

Formulera ett linjärt bivillkor som skär bort optimallösningen till relaxationen, men ingen tillåten rundtur. (4p)

Uppgift 8

Familjen Mysholm har en stor trädgård som dock består av fem delar, separerade av murar och häckar. Det har fallit massor höstlöv från familjens stora ekar, och de måste räfsas bort. Man har bestämt att familjens fem medlemmar ska räfsa var sin del av trädgården. Alla vill givetvis ta den minsta delen, så man bestämmer sig för att göra en optimal tillordning. Först görs en bedömning av hur lång tid det skulle ta för varje person att räfsa varje del. Dessa tider anges i nedanstående matris, där rader står för delar av trädgården och kolumner står för personer. Därefter vill man helt enkelt finna den tilldelning av personer till områden som minimerar total räfstid (dvs. summan av tiderna).

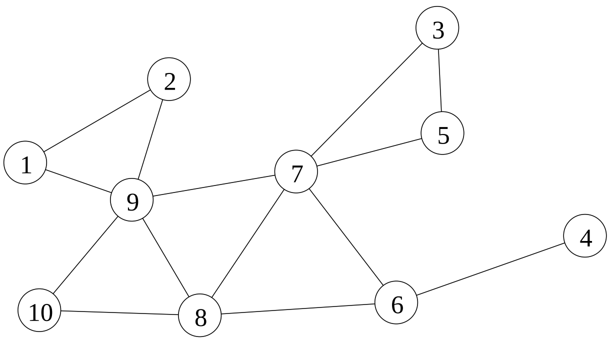
$$C = \begin{pmatrix} 5 & 7 & 5 & 8 & 8 \\ 6 & 8 & 7 & 9 & 9 \\ 7 & 8 & 7 & 9 & 8 \\ 5 & 5 & 4 & 7 & 8 \\ 5 & 6 & 5 & 8 & 8 \end{pmatrix}$$

a) Lös problemet med ungerska metoden. Ange optimal lösning samt målfunktionsvärde. Ange även dual optimallösning och kontrollera starka dualsatsen. (3p)

b) Lill-Hasses räfsa är lite trasig, och han kan inte använda någon annan (för de är för stora). Därför kommer alla tider för Lill-Hasse (kolumn 4) att öka med 3. Kommer detta att förändra den primala optimallösningen? Kommer detta att förändra den duala optimallösningen? (Lös inte om.) (1p)

Uppgift 9

Gymnastikläraren Violia ska lära sina mellanstadieelever att dansa, och ställs inför den förvånansvärt svåra uppgiften att bilda danspar, dvs. para ihop eleverna två och två. Det svåra är att många är osams, eller kan/vill inte av andra orsaker dansa ihop. I följande graf motsvarar noderna elever och en båge att de två kan tänka sig att dansa ihop. Först låter Violia eleverna bestämma själva, vilket leder till att paren (1,9), (3,5) och (6,7) snabbt bildas, medan de andra står villrådiga kvar ensamma.



a) Vilket känt optimeringsproblem är det att bilda den parbildning som gör att så många som möjligt kan dansa? Finn en lösning med lämplig metod. Starta med parbildningen ovan. Visa stegen i metoden. (3p)

b) Violia är lite gammaldags, och vill att varje par ska bestå av en pojke och en flicka. Hur förändras strukturen hos problemet? Kan man använda någon effektivare lösningsmetod? (1p)

c) Violia delar ut färgband till varje elev, så att de som kan dansa med varandra får olika färger. Hon vill använda så få färger som möjligt. Vilket känt optimeringsproblem är detta? Finn en övre och en undre gräns för det optimala antalet färger i ovanstående graf. (1p)

d) Violia vill (av okänd anledning) sätta färg på varje möjlig dansrelation (båge i grafen), så att alla relationer för en elev har olika färger. Hon vill använda så få färger som möjligt. Vilket känt optimeringsproblem är detta? Finn en övre och en undre gräns för det optimala antalet färger i ovanstående graf. (1p)