

## TAOP33/TEN 2 KOMBINATORISK OPTIMERING GRUNKURS

**Datum:** 7 januari 2020  
**Tid:** 14.00-19.00  
**Hjälpmedel:** Miniräknare  
Kurslitteratur: Kaj Holmberg: *Optimering*  
Anteckningar i boken får förekomma.  
**Antal uppgifter:** 9  
**Antal sidor:** 7  
Uppgifterna är *inte* ordnade efter svårighetsgrad.  
Totalt antal poäng är 40. För godkänt krävs 16 poäng.  
**Examinator:** Kaj Holmberg  
**Jourhavande lärare:** Kaj Holmberg, tel 013-282867  
**Resultat meddelas per e-post**

### Tentamensinstruktioner

#### När Du löser uppgifterna

*Redovisa dina beräkningar och din lösningsmetodik noga.  
Motivera alla påståenden du gör.  
Använd de standardmetoder som ingår i kursen.*

*Skriv endast på ena sidan av lösningsbladen. Använd inte rödpenna.  
Behandla endast en huvuduppgift på varje blad.*

#### Vid skrivningens slut

*Sortera dina lösningsblad i uppgiftsordning.  
Markera på omslaget vilka uppgifter du behandlat.  
Kontrollräkna antalet inlämnade blad och fyll i antalet på omslaget.*

### Uppgift 1

Firma Gel AB har uppfunnit nytt godis. Man använder samma gjutform som för gelehallon, men använder olika färger och olika smakessenser. Man har inte riktigt bestämt namn på dem ännu (man vill gärna ha något som för tankarna till frukt, även om ingen frukt ingår), och benämner dem för tillfället med den färg de har. Eftersom man är lite osäker på marknaden, väljer man att sälja påsar med blandade färger. Man har tänkt sig följande blandpåsar:

1. 10 blå, 0 svarta och 20 vita. Vinst: 4.
2. 10 blå, 15 svarta och 0 vita. Vinst: 5.
3. 10 blå, 15 svarta och 20 vita. Vinst: 2.
4. 10 blå, 10 svarta och 0 vita. Vinst: 3.

Man har för tillfället 120 000 blå, 90 000 svarta och 80 000 vita.

Gel formulerar följande linjära optimeringsproblem, där  $x_j$  står för hur många 1000 påsar av sort  $j$  de ska sätta ihop.

$$\begin{array}{rcll} \max & z = & 4x_1 + 5x_2 + 2x_3 + 3x_4 & \\ \text{då} & & 10x_1 + 10x_2 + 10x_3 + 10x_4 \leq 120 & (1) \\ & & 15x_2 + 15x_3 + 10x_4 \leq 90 & (2) \\ & & 20x_1 + 20x_3 \leq 80 & (3) \\ & & x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0 & \end{array}$$

a) Lös detta LP-problem med simplexmetoden. Ange optimal primallösning och duallösning samt målfunktionsvärde. Vilka bivillkor blir aktiva (dvs. vilka färger blir över)? (3p)

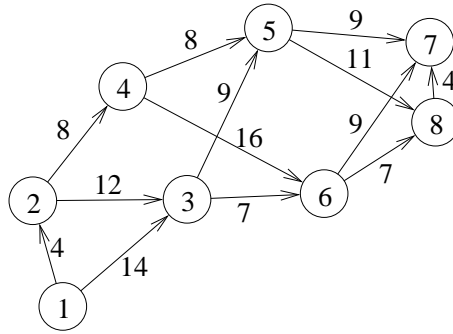
b) Gel AB bestämmer att man ska skänka bort 5 st av valfri färg till välgörande ändamål. Vilken färg är bäst att välja, och varför? Vilken färg är sämst att välja, och varför? (2p)

c) Utgå från optimallösningen i uppgift a. Man funderar på en ny påse, med 20 svarta och 20 vita. Vad skulle vinsten behöva vara för den påsen för att den skulle kunna förbättra lösningen? (1p)

d) Formulera det duala bivillkoret som motsvarar den nya variabeln i uppgift c. Visa att resultatet verifierar svaret i uppgift c. (1p)

### Uppgift 2

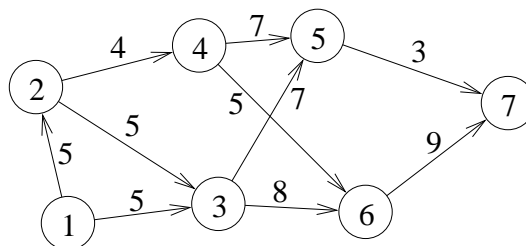
Gel AB har fått en engångsbeställning av 10 ton skumtomtar till en affär strax utanför Karesuando. Man ska skicka sin största lastbil med lasten, och funderar på vilken väg som är bäst. Den ska köra från nod 1 till nod 7 i följande nätverk, där bågarna är märkta med uppskattad restid i timmar. Man vill finna en väg med minimal total restid.



- a) Vilket optimeringsproblem blir detta? Finn en optimallösning till problemet. Beskriv stegen i metoden. Ange väg och total restid. (2p)
- b) Föraren behöver ta raster under färden, och vill därför veta när hon anländer till de olika platserna/noderna. Ange detta (i restid från starttidpunkten). (1p)
- c) Man skulle kunna leverera tomtarna till Kiruna (nod 8) istället, och låta affärsinnehavaren själv ta hand om den sista transporten. Självklart måste man då sänka priset på transporten. Antag att sänkningen som gör att affärsinnehavaren accepterar detta motsvarar 2 tidsenheters förlust för Gel. Lönar sig detta för Gel? (1p)

### Uppgift 3

Gel AB har många transporter till staden Lullköping (där det bor många studenter), och efterfrågan ökar hela tiden. Man börjar därför fundera på hur mycket man kan få fram dit överhuvudtaget. Möjliga transportvägar ges av nedanstående graf, där nod 1 är Gels fabrik och nod 7 Lullköping, och varje båge märkts med maximal mängd som kan transporteras den vägen. Man vill helt enkelt finna den maximala mängd godis som kan transporteras från nod 1 till nod 7.



- a) Lös problemet med standardmetod. Visa varje steg i metoden tydligt. Ange minsnitt. (3p)
- b) Skulle en extra bil från nod 4 till nod 7 med kapacitet 3 enheter öka totala flödet från nod 1 till nod 7? (1p)

### Uppgift 4

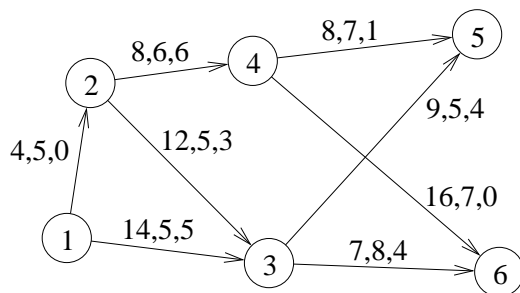
Gel AB funderar på att köpa fler gjutmaskiner för godis. Det finns två olika sorter, med olika kapacitet och kostnad. Låt  $x_j$  ange hur många maskiner av sort  $j$  man köper. Man vill maximera total kapacitet under bivillkoret att kostnaden inte överstiger den budgeterade, vilket leder till följande linjära heltalsproblem.

$$\begin{aligned} \max \quad & z = 5x_1 + 7x_2 \\ \text{då} \quad & 6x_1 + 8x_2 \leq 12 \\ & x_1, x_2 \geq 0, \text{ heltal} \end{aligned}$$

- a) Lös problemet med Land-Doig-Dakins metod. LP-problem får lösas grafiskt. (3p)
- b) Hur mycket skulle man behöva öka budgeten för att få en bättre lösning? Finn svaret genom att studera problemet grafiskt. (1p)

### Uppgift 5

Gel AB köper upp konkurrentfirman Gått&Grått, och tar över deras fabriker. Man ställs då inför problemet att dagligen köra produkterna från fabrikena till grossisterna. Följande nätverk ger möjliga transportvägar. Varje dag produceras 5 ton i nod 1 och 9 ton i nod 2, och 5 ton ska levereras till nod 4, 5 ton till nod 5 och 4 ton till nod 6. På bågarna står först kostnaden att transportera ett ton, sedan en övre gräns för hur många ton som kan transporteras den vägen, och till sist ett transportmönster som tidigare räknats fram av konsultbyrån MerOpt.

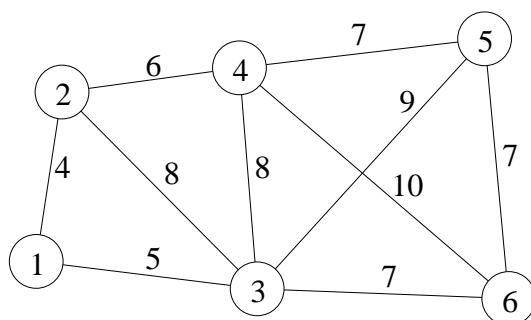


- a) Man har haft vägarbete på båge (4,6) och därför har kostnaden varit hög. Nu blir vägarbetet färdigt, och kostnaden sjunker från 16 till 5. Starta med MerOpts lösning och beräkna en ny optimallösning. (3p)
- b) Man har möjlighet att producera upp till 8 ton i nod 1, och vill veta hur mycket man skulle tjäna på att öka produktionen där, och hur man då skulle transportera godiset. Efterfrågan ändras inte, så produktionen i nod 2 måste minska lika mycket som den ökas i nod 1. Hur kan nätverket modifieras så att detta optimeras? Gör detta och finn bästa lösning. Utgå från lösningen i uppgift

a. (2p)

### Uppgift 6

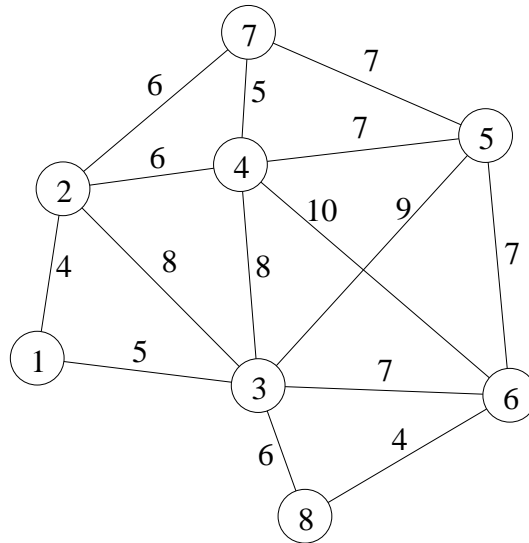
Följande graf föreställer korridorerna i en av Gels fabriker. De måste rengöras varje kväll, och det görs av en maskin. Maskinen står i nod 1 och ska köra en rundtur så att den åter hamnar i nod 1 när den har rengjort alla korridorer. På varje båge i grafen står tiden det tar att rengöra den. Man vill att rengöringen ska vara färdig så fort som möjligt. (Maskinen kör lika fort när den rengör som när den inte gör det.)



Vilket optimeringsproblem blir detta? Finn en optimallösning till problemet. Beskriv stegen i metoden noggrant. Ange rundtur och total tid. (Ledning: Summan av alla bågkoefficienter är 71.) Vilka vägar kommer att passeras mer än en gång? (3p)

### Uppgift 7

Teknologen Laban sommarjobbar som nattvakt, och får i uppdrag att kontrollera en av Gels fabriker. Det finns nycklar utplacerade på flera ställen i fabriken och hans uppgift är att vrida om varje nyckel i en apparat han bär med sig. Laban kommer under sin vandring i den ödsliga fabriken att tänka på att detta påminner om orientering. Han ska alltså gå en rundtur som besöker ett antal punkter (en gång). Varför inte välja den kortaste rundturen? Följande graf visar möjliga vägar mellan nycklarna, och på bågarna står gångtid.



a) Vilket känt optimeringsproblem är det att finns den bästa rundturen? Finn en bra lösning med en känd heuristik. Finn även en undre gräns för det optimala målfunktionsvärdet genom att lösa en relaxation av problemet. Ange hur långt ifrån optimum den erhålla lösningen i värsta fall är. (Laban har glömt bort att nycklarna måste tas i en viss ordning, så hans lösning kan inte användas, men det struntar vi i.) (3p)

b) Formulera ett linjärt bivillkor som skär bort optimallösningen till relaxationen i uppgift a, men inte skär bort någon tillåten rundtur. (1p)

### Uppgift 8

Gel AB har nyanställt fem maskinoperatörer som ska sköta fem olika maskiner i fabriken. De har olika utbildning och erfarenhet, så de kan hantera de olika maskinerna med olika framgång, och frågan är vem som ska ta hand om vilken maskin. En ny person betyder alltid ett produktionsbortfall jämfört med en erfaren person. Man har därför gjort en matris över produktionsbortfallet för varje person att sköta varje maskin, där rader står för maskiner och kolumner står för personer. Man vill helt enkelt finna den tilldelning av personer till maskiner som minimerar total produktionsbortfall.

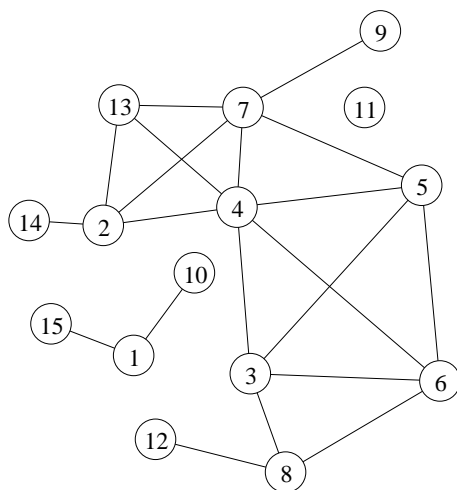
$$C = \begin{pmatrix} 15 & 18 & 15 & 18 & 19 \\ 6 & 8 & 7 & 9 & 9 \\ 27 & 27 & 27 & 29 & 28 \\ 5 & 5 & 4 & 6 & 7 \\ 15 & 16 & 15 & 18 & 19 \end{pmatrix}$$

a) Lös problemet med ungerska metoden. Ange optimal lösning samt målfunktionsvärde. Ange även dual optimallösning och kontrollera starka dualsatsen. (3p)

b) Maskin 3 har ersatts av en nyare modell som alla är ännu mer ovana vid, så alla produktionsbortfallskoefficienter i rad 3 ökas med 5. Kommer detta att förändra den primala optimallösningen, och i så fall hur? Kommer detta att förändra den dual optimallösningen, och i så fall hur? (Lös inte om.) (1p)

### Uppgift 9

Gel AB kommer överens med invandrarverket att anställa ett antal "nyanlända" (flyktingar/invandrare). Eftersom i princip alla har problem med språket, bestämmer man att de ska jobba i par, för att kommunikationsmöjligheterna ska vara bättre. Man konstruerar en graf där varje nod är en arbetare och det går en båge mellan arbetare som skulle kunna bilda par. (De ska förstå varandra, men också ha tillräckligt olika språkkunskaper för att kunna hjälpa varandra.) Målet är att få med alla, eller så många som möjligt, i ett par.



a) Vilket känt optimeringsproblem är detta? Finn en lösning med lämplig metod. Starta med paren  $(2,7)$ ,  $(3,5)$ ,  $(1,15)$  och  $(8,12)$ . Visa stegen i metoden. Kommer alla med i ett par? (3p)

b) Gel bestämmer sig för att ge varje arbetare en viss färg, så att de som kan samarbeta med varandra får olika färger. Man vill använda så få färger som möjligt. Vilket känt optimeringsproblem är detta? Finn en övre och en undre gräns för det optimala antalet färger i ovanstående graf. (1p)

c) Finn en övre och en undre gräns för det optimala antalet färger i en bågfärgning med minimalt antal färger i ovanstående graf. (1p)