Matematiska institutionen
Optimeringslära

TENTAMEN

TAOP33/TEN 2
KOMBINATORISK OPTIMERING GRUNDKURS

Datum:	28 augusti 2020
Tid:	14.00-19.00
Hjälpmedel:	Miniräknare
	Kurslitteratur: Kaj Holmberg: *Optimering*
	Anteckningar och annat skriftligt material.
Antal uppgifter:	8
Antal sidor:	8
	Uppgifterna är *inte* ordnade efter svårighetsgrad.
	Totalt antal poäng är 40. För godkänt krävs 16 poäng.
Examinator:	Kaj Holmberg
Jourhavande lärare:	Kaj Holmberg, tel 013-282867, epost kaj.holmberg@liu.se

Resultat meddelas per e-post

Tentamensinstruktioner

När Du löser uppgifterna

Redovisa dina beräkningar och din lösningsmetodik noga.
Motivera alla påståenden du gör.
Använd de standardmetoder som ingår i kursen.
Skriv endast på ena sidan av lösningsbladen. Använd inte rödpenna.
Behandla endast en huvuduppgift på varje blad.

Vid skrivningens slut

Sortera dina lösningsblad i uppgiftsordning.
Markera på omslaget vilka uppgifter du behandlat.
Kontrollräkna antalet inlämnade blad och fyll i antalet på omslaget.
Fotografera eller skanna in tentan och skicka in som en pdf-fil.
(Se separata instruktioner.)

Samtliga numeriska värden i denna tenta är påhittade. Sammanhangen är dock till stor del inspirerade av nuvarande verklighet.

Uppgift 1

En regering funderar över bidrag som ska förhindra att många företag går i konkurs vid en pandemi. Man överväger fyra olika bidrag:
Bidrag 1: Möjlighet att skjuta upp betalning av skatt och avgifter.
Bidrag 2: Slopat krav på läkarintyg under de första 14 sjukdagarna.
Bidrag 3: Stöd vid minskad omsättning.
Bidrag 4: Slopad karens.
Summan av kostnaderna för bidragen får inte överskrida 100 mkr.

Man sätter upp en linjär optimeringsmodell för att bestämma hur mycket som ska användas till varje typ av bidrag, där x_j är det belopp som ska användas till bidragstyp j. Målfunktionen är baserad på uppskattningar av hur verksamma de olika bidragen är, och man vill maximera den total effekten.

Bivillkor (1) anger maximal totalsumma. Bivillkor (2) och (3) står för begränsningar som gjorts av politiska skäl, eftersom regeringen inte har majoritet i riksdagen, utan måste komma överens med andra partier.

$$
\begin{array}{llrcrcrcrcrr}
\max & z = & 4x_1 & + & 2x_2 & + & 3x_3 & + & 2x_4 & & & \\
\text{då} & & x_1 & + & x_2 & + & x_3 & + & x_4 & \leq & 100 & (1) \\
& & x_1 & + & x_2 & - & x_3 & & & \leq & 20 & (2) \\
& & & & x_2 & + & x_3 & - & x_4 & \leq & 30 & (3) \\
& & x_1, & & x_2, & & x_3, & & x_4 & \geq & 0 &
\end{array}
$$

a) Lös detta LP-problem med simplexmetoden. Ange optimal primallösning och duallösning samt målfunktionsvärde. Är optimallösningen unik? Vilka bivillkor blir aktiva? (3p)

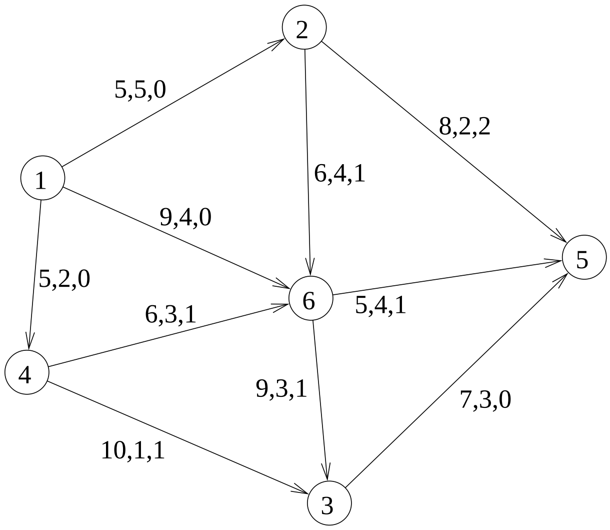
b) Utgå från optimallösningen i uppgift a. Genom att byta samarbetspartner kan regeringen få bort ett av bivillkoren (2) och (3). Vilket ska man välja för att få störst förbättring av lösningen? (1p)

c) Ett mindre parti föreslår en ny typ av bidrag, ersättning för miljöfrämjande åtgärder. Den bidragstypen skulle ha målfunktionskoefficient 2 och bivillkorskoefficienter 1, 1 och -1 i de tre bivillkoren. Utgå från optimallösningen i uppgift a. Blir det optimalt att avdela några pengar till denna bidragstyp? (1p)

d) Formulera det duala bivillkoret som motsvarar den nya variabeln i uppgift c. Visa att resultatet verifierar svaret i uppgift c. (1p)

Uppgift 2

Under första fasen i en pandemi drabbades främst storstäder, men under en andra fas uppträder smittspridning på andra platser i landet. Det betyder att behovet av respiratorer för intensivvård förändras geografiskt. Antalet tillgängliga respiratorer är begränsat, så man måste transportera apparaterna mellan sjukhus. I följande nätverk motsvarar noderna olika sjukhus och bågarna möjliga transportvägar. Det finns inte möjlighet till direkttransporter i samtliga fall, så ibland kan man behöva lasta om apparaterna, men detta kan bara ske vid sjukhus. I den situation man står inför kommer det att finnas överskott av respiratorer i vissa noder, nämligen 2 i nod 1, 3 i nod 2 och 2 i nod 4. Underskottet, dvs. behovet utöver de som redan finns på plats, kommer att uppgå till 2 i nod 3 och 3 i nod 5. Man vill minimera kostnaderna för transporterna, och kostnaden per respirator är angiven på varje båge. På bågarna anges också hur många som maximalt kan skickas den vägen, samt en föreslagen lösning, framtagen av administratörer på ett större sjukhus i huvudstaden.



a) Det hela blir ett obalanserat minkostnadsflödesproblem, dvs. total källstyrka är större än total sänkstyrka. Alla respiratorer i nod 1, 2 och 4 kommer inte att flyttas. I den föreslagna lösningen lämnas de två i nod 1 kvar, men det är inte säkert att det är optimalt. Modifiera nätverket så att det blir balanserat, så att överskottet fördelas på ett optimalt sätt. Visa att den föreslagna lösningen är optimal. (2p)

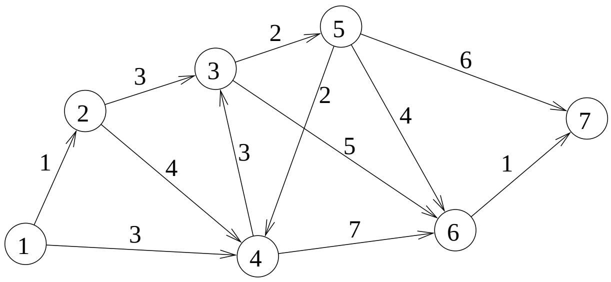
b) Man har vid framtagande av indata missat en transportmöjlighet, nämligen från nod 1 till nod 5, där högst en respirator kan skickas, med kostnad 10. Utgå från lösningen i uppgift a och beräkna en ny optimallösning. Hur mycket minskas totalkostnaden av ändringarna? (2p)

c) Man har gått igenom många framtidsscenarier, och i en av dem uppstår ett mycket stort behov i nod 5. Frågan är då hur mycket man maximalt kan skicka från nod 1 till nod 5. Båge (6, 3) är temporär och kommer då inte att finnas kvar. Lös problemet med standardmetod. Starta med flöde noll. Visa varje steg i metoden tydligt. Ange minsnitt och förklara vad det betyder. (3p)

d) Betrakta lösningen i uppgift c. Med visst besvär skulle man kunna öppna en transportmöjlighet från nod 1 till nod 3, med kapacitet 2. Skulle det kunna öka det maximala flödet från nod 1 till nod 5? (1p)

Uppgift 3

En person ska förflytta sig genom ett område där det finns möjliga smittokällor, från nod 1 till nod 7 i nedanstående graf. På varje båge står risken att bli smittad om man går där. Personen vill finna den väg som ger minimal summa av dessa risker.



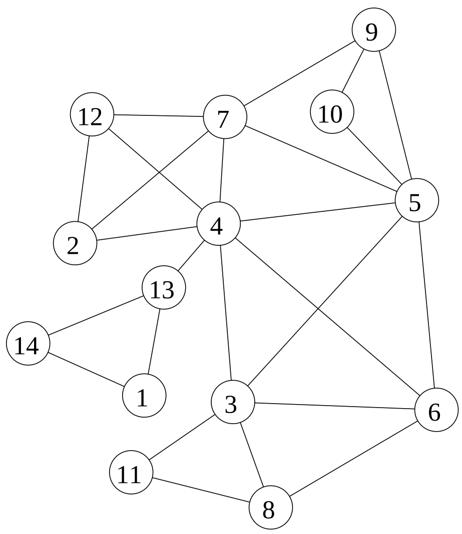
a) Vilket optimeringsproblem blir detta? Finn en optimallösning till problemet. Beskriv stegen i metoden. Ange bästa väg och total smittorisk. (2p)

b) Det visar sig att det är smittorisk även i noderna, p.g.a. trängsel. Smittorisken är 2 i noderna 1, 2, 3 och 4, och 3 i noderna 5, 6 och 7. Modifiera nätverket och finn ny bästa väg. (1p)

Uppgift 4

Under en pandemi får ambulanspersonalen något ändrade arbetsuppgifter. Man ska dels klara av normala ambulansuppdrag, samtidigt som man är iklädd skyddsutrustning, och man ska också kunna testa personer för ett speciellt virus med ett nytt snabbtest. Det är två personer som arbetar i varje ambulans, och man behöver konstruera nya sådana par, så att deras kompetens kompletterar varandra.

Man konstruerar en graf där varje nod är en medarbetare och det går en båge mellan personer som skulle kunna bilda par. Målet är att skapa så många par som möjligt.



a) Vilket känt optimeringsproblem är detta? Baserat på tidigare parbildning vill man starta med paren (3,4), (5,6), (13,14), 8,11), (9,10) och (2,12). Finn en lösning med lämplig metod. Starta med angivna par. Visa stegen i metoden. Kan flera par bildas? (2p)

b) Finn en övre och en undre gräns för det optimala antalet färger i en nodfärgning med minimalt antal färger i ovanstående graf. (1p)

c) Finn en övre och en undre gräns för det optimala antalet färger i en bågfärgning med minimalt antal färger i ovanstående graf. (1p)

Uppgift 5

Ett universitet ställs inför utmaningen att planera för undervisningen under ett smittohot, där det krävs mer utrymme än vanligt för varje student. Lokalerna kommer inte att räcka till, så några kurser får ges på distans. Universitetet tror att det är negativt att köra kurser på distans, och vill gärna undvika det.

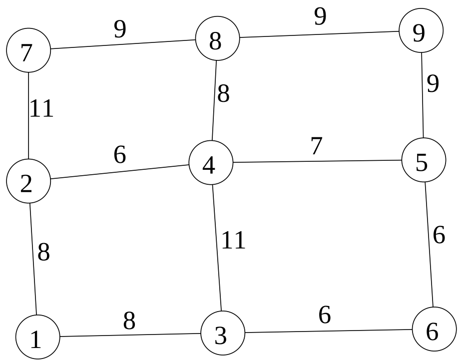
a) Formulera en matematisk modell för optimeringsproblemet att bestämma vilka kurser som ska ge på normalt sätt på campus, och vilka som ska ges på distans. Indata är c_j: värdet av att ge kurs j på campus, dvs. inte på distans, a_{ij}: antalet rum av storlek i som krävs för att köra kurs j på campus, samt b_i: antalet rum av storlek i som finns tillgängliga på campus. (1p)

b) Betrakta specialfallet med $c = (2, 3, 4, 2)$, $b = (5, 3)$ och $a = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 & 1 \\ 3 & 4 & 3 & 3 \end{pmatrix}$. Skriv upp modellen med siffror. Lös problemet med Balas metod. Examinatorn för kurs 1 har stor makt på universitetet, så starta med att konstatera att $x = (1, 0, 0, 0)$ är en tillåten lösning (och därmed ger en undre gräns). Förgrena över variablerna i indexordning, och gå ner i 1-grenen först. (3p)

c) Universitetsledningen gissar på att det finns tillräckligt med rum av storlek 1, och tar bort det bivillkoret. Man kan genom viss omflyttning skapa ett rum till av storlek 2, så att högerledet blir 4. Lös detta problem med Land-Doig-Dakins metod. Ledning: Gå ner i $\geq$-grenen först. (3p)

Uppgift 6

Följande graf föreställer korridorerna i en skola. Man planerar att börja ge kurserna på vanligt sätt, med krav på personlig närvaro, efter att under en tid ha bedrivit undervisningen på distans. För att kunna göra det, kräver skyddsombudet att alla korridorer och skolsalar saneras från eventuell smitta av en maskin varje kväll. Maskinen står i nod 1 och ska köra en rundtur så att den åter hamnar i nod 1 när den har sanerat alla korridorer. På varje båge i grafen står tiden det tar att sanera korridoren samt alla salar i den korridoren. Man vill bestämma hur maskinen ska köra för att saneringen ska vara färdig så fort som möjligt. Maskinen kör fyra gånger så fort när den inte sanerar som när den gör det.



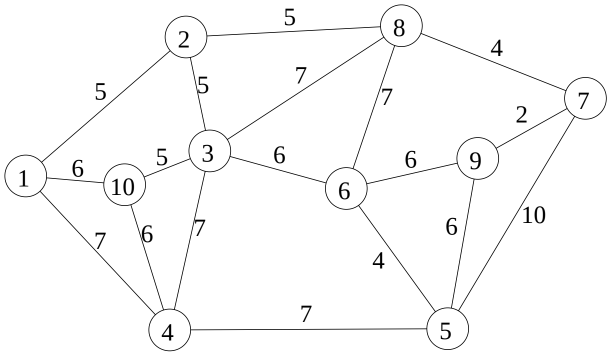
a) Vilket optimeringsproblem blir detta? Finn en optimallösning till problemet. Beskriv stegen i metoden noggrant. Ange rundtur, total tid samt hur många gånger varje korsning passeras. Vilka korridorer kommer att passeras mer än en gång? (3p)

b) Antag att maskinen måste köra två gånger i varje korridor. Ange totalkostnad för optimallösningen. Ledning: Man behöver inte lösa optimeringsproblemet, utan kan motivera svaret på ett annat sätt. (1p)

Uppgift 7

Man ska kontrollera att alla restauranger på en ort följer kraven på pandemianpassad verksamhet, dvs. att borden flyttats isär, och att ingen trängsel sker någonstans i lokalen. Man skickar ut en kontrollant, som har befogenheten att omedelbart stänga en restaurang som inte uppfyller kraven.

Kontrollanten vill finna en rundtur som tar så lite tid som möjligt i nedanstående graf, där noderna motsvarar restauranger, och varje båge är märkt med transporttid. Tiden för kontroll av en restaurang påverkas inte av vilken rundtur som används, så det är bara transporttiden som ska minimeras.



a) Vilket känt optimeringsproblem är det att finns den bästa rundturen? Finn en bra lösning med en känd heuristik. Finn även en undre gräns för det optimala målfunktionsvärdet genom att lösa en relaxation av problemet. Ange hur långt ifrån optimum den erhålla lösningen i värsta fall är. (2p)

b) Formulera ett linjärt bivillkor som skär bort optimallösningen till relaxationen i uppgift a, men inte skär bort någon tillåten rundtur. (1p)

Uppgift 8

Fem tillfälligt permitterade personer ska hjälpa till på ett sjukhus. Personerna har dock olika kompetens och ska få olika tjänster. Varje person kommer att kräva en viss upplärningstid innan arbetet kan påbörjas, beroende på kompetens och tjänst. Man har därför gjort en matris över nödvändig upplärningstid för varje person och varje arbetsplats, där rader står för personer och kolumner står för tjänster. Man vill finna den tilldelning av personer till tjänster som minimerar total upplärningstid.

$$C = \begin{pmatrix} 8 & 9 & 4 & 5 & 7 \\ 6 & 8 & 7 & 9 & 9 \\ 7 & 7 & 7 & 7 & 8 \\ 8 & 5 & 4 & 7 & 7 \\ 5 & 6 & 5 & 8 & 6 \end{pmatrix}$$

a) Lös problemet med ungerska metoden. Ange optimal lösning samt målfunktionsvärde. Ange även dual optimallösning och kontrollera starka dualsatsen. (3p)

b) Det visar sig att tjänst 1 numera görs med en mycket avancerad maskin, så alla upplärningstider i kolumn 1 ökas med 10. Kommer detta att förändra den primala optimallösningen, och i så fall hur? Kommer detta att förändra den duala optimallösningen, och i så fall hur? (Lös inte om.) (1p)

c) Antag att upplärningen sker samtidigt, och att alla ska börja jobba samtidigt. Man vill då istället minimera den maximala upplärningstiden för någon person. Är detta ett svårt optimeringsproblem? Beskriv en optimerande lösningsmetod, och ange en optimal lösning. Motivera optimaliteten. (1p)