Matematiska institutionen
Optimeringslära

TENTAMEN

TAOP33/TEN 2
KOMBINATORISK OPTIMERING GRUNDKURS

Datum:	4 januari 2021
Tid:	14.00-19.00
Hjälpmedel:	Miniräknare
	Kurslitteratur: Kaj Holmberg: *Optimering*
	Anteckningar och annat skriftligt material.
Antal uppgifter:	9
Antal sidor:	8
	Uppgifterna är *inte* ordnade efter svårighetsgrad.
	Totalt antal poäng är 40. För godkänt krävs 16 poäng.
Examinator:	Kaj Holmberg
Jourhavande lärare:	Kaj Holmberg, tel 013-282867, epost kaj.holmberg@liu.se

Resultat meddelas per e-post

Tentamensinstruktioner

När Du löser uppgifterna

Redovisa dina beräkningar och din lösningsmetodik noga.
Motivera alla påståenden du gör.
Använd de standardmetoder som ingår i kursen.
Skriv endast på ena sidan av lösningsbladen. Använd inte rödpenna.
Behandla endast en huvuduppgift på varje blad.

Vid skrivningens slut

Sortera dina lösningsblad i uppgiftsordning.
Markera på omslaget vilka uppgifter du behandlat.
Kontrollräkna antalet inlämnade blad och fyll i antalet på omslaget.
Fotografera eller skanna in tentan och skicka in som en pdf-fil.
(Se separata instruktioner.)

Samtliga numeriska värden i denna tenta är påhittade. Sammanhangen är dock till stor del inspirerade av nuvarande verklighet.

Uppgift 1

Ett litet land planerar att vaccinera sin befolkning mot en pågående pandemi. Man vill nu göra beställningar på vaccin. Det finns flera producenter i olika länder som man kan beställa från, och vaccinen har lite olika egenskaper. Vaccinen man överväger kommer från Ryssland, Tyskland, USA och Kina, och antalet vaccindoser man ska beställa anges av x_1, x_2, x_3 och x_4, i denna ordning. För att bestämma hur mycket man ska beställa från varje producent formulerar man följande LP-modell, där målfunktionen modellerar förväntad nytta för staten (baserat på vaccinets effektivitet). Det första bivillkoret avser den begränsade budgeten, det andra möjligheterna till transport (vissa vaccin måste förvaras extra kallt) och de följande begränsad tillgång.

$$
\begin{array}{llrcrcrcrcrr}
\max & z = & x_1 & + & 3x_2 & + & 2x_3 & + & x_4 & & & \\
\text{då} & & 4x_1 & + & 3x_2 & + & 5x_3 & + & 6x_4 & \leq & 50 & (1) \\
& & 2x_1 & + & 2x_2 & + & 4x_3 & + & 5x_4 & \leq & 40 & (2) \\
& & x_1 & & & & & & & \leq & 20 & (3) \\
& & & & x_2 & & & & & \leq & 10 & (4) \\
& & & & & & x_3 & & & \leq & 50 & (5) \\
& & & & & & & & x_4 & \leq & 100 & (6) \\
& & x_1, & & x_2, & & x_3, & & x_4 & \geq & 0 &
\end{array}
$$

a) Lös detta LP-problem med simplexmetoden. Ange optimal primallösning och duallösning samt målfunktionsvärde. Vilka bivillkor blir aktiva, och vad betyder det? (3p)

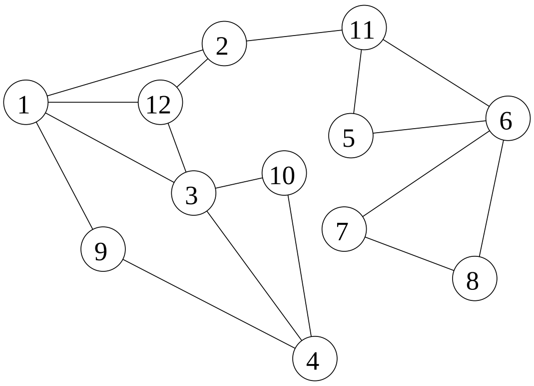
b) Utgå från optimallösningen i uppgift a. Om man kunde öka ett högerled för någon av bivillkoren lite (antingen genom att anslå mera pengar totalt, eller förhandla fram ökad tillgång hos någon producent), vilket skulle man tjäna mest på? Motivera. (1p)

c) Utgå från optimallösningen i uppgift a. England visar sig ha fått fram ett vaccin, med bivillkorskoefficienter 6 och 3 i de två första bivillkoren. Om man ska beställa från dem, måste det ske innan nuvarande handelsavtal slutar gälla, så det krävs ett snabbt beslut. Vad skulle målfunktionskoefficienten behöva vara för att lösningen skulle förbättras genom att köpa därifrån? (1p)

d) Formulera LP-dualen till LP-problemet. Visa att den duala lösningen i uppgift a är tillåten samt att starka dualsatsen är uppfylld. Formulera det duala bivillkoret som motsvarar den nya variabeln i uppgift c. Stoppa in den duala lösningen och visa att resultatet verifierar svaret i uppgift c. (2p)

Uppgift 2

På grund av en pågående pandemi måste sjukvården nyrekrytera, och man tittar nu på ambulanspersonal. Det ska vara två personer i varje ambulans, och det är mycket viktigt att de två kan samarbeta bra. Uppgiften nu är att bland de sökande sätta ihop väl fungerande par. Man har konstruerat en graf med en nod per person, och en båge mellan de personer som troligen skulle fungera bra ihop, dvs. som kan bilda ett par. Målet är att få ihop så många ambulansbesättningar som möjligt. De som inte får tjänst i en ambulans kommer att få en annan, sämre avlönad tjänst.



a) Vilket känt optimeringsproblem är detta? Starta med paren (1, 2), (3, 4), (5, 6) och (7, 8) och finn en optimal lösning med lämplig metod. Visa stegen i metoden. (3p)

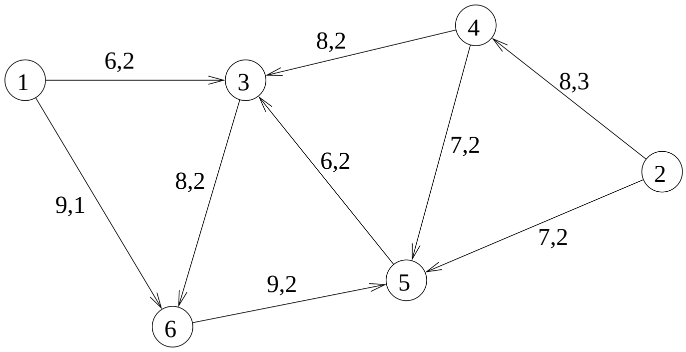
b) Det visar sig att ungefär hälften av de sökande har erfarenhet från liknande arbete, medan resten är nybörjare. Man bestämmer sig för att det ska vara en erfaren person och en nybörjare i varje ambulans. Hur visar sig denna struktur när det gäller grafen? Antag att man dessutom gör en bedömning av hur väl varje möjligt par skulle fungera, och vill maximera detta mått. Hur kan man utnyttja denna struktur algoritmiskt? (2p)

c) Finn en övre och en undre gräns för det optimala antalet färger i en nodfärgning i ovanstående graf. (1p)

d) Finn en övre och en undre gräns för det optimala antalet färger i en bågfärgning i ovanstående graf. (1p)

Uppgift 3

När vaccineringen ska sätta igång, står man inför ett stort transportproblem. Vaccinet ska transporteras i speciella kylbilar från flygplatser till sjukhus, och det bör ske snabbt, så att vaccineringen kommer igång så snabbt som möjligt. I följande nätverk är nod 1 och 2 flygplatser dit man förväntar sig få 1000 resp. 2000 doser levererade. Det finns behov av 1500 i nod 4, 1500 i nod 5 och 1000 i nod 6. På bågarna står först kostnaden att transportera en enhet, och sedan en övre gräns för hur mycket som kan transporteras den vägen. (Dessa data är angivna i enheter om 500 doser.)



a) Det hela blir ett obalanserat minkostnadsflödesproblem, dvs. total källstyrka är mindre än total sänkstyrka. All efterfrågan kommer inte att kunna tillgodoses. Modifiera nätverket så att det blir balanserat, genom att ta hand om underskottet på ett optimalt sätt, då målet är att minimera kostnaderna och skicka allt man har. (1p)

b) Transportfirman föreslår att man ska skicka en enhet från nod 1 direkt till nod 6, och en enhet från nod 1 via nod 3 till nod 6, samt två enheter från nod 2 till nod 4, och två enheter från nod 2 till nod 5. Man påstår att det är det billigaste sättet att göra transporterna. Verifiera eller motbevisa detta påstående. (2p)

c) Utgå från lösningen i uppgift b. Ett vägarbete har blivit försenat (pga. pandemin), så kostnaden på båge (2, 5) är 10, inte 7 som man trodde. Ändras optimallösningen? Om så är fallet, beräkna en ny optimallösning. Jämför kostnadsförändringen mellan optimallösningarna med kostnadsförändringen om man behåller samma lösning. (2p)

d) Man planerar för en framtid där väldigt många doser anländer till flygplatserna. Därför vill man veta hur mycket som överhuvudtaget kan skickas från dessa till sjukhusen. Gör därför på följande sätt. Betrakta alla bågar som dubbelriktade. Inför två nya noder, en superkälla med bågar till nod 1 och 2, med hög kapacitet, och en supersänka, med bågar från nod 4, 5 och 6, alla med hög kapacitet. Finn sedan maxflöde från superkällan till supersänkan. Använd ovanstående nätverk och de kapaciteter som anges. (Dock ej den angivna startlösningen.) Man är också intresserad av minsnittet, dvs. vilka bågar som begränsar maxflödet. Lös problemet med standardmetod. Visa varje steg i metoden tydligt. Ange minsnitt. Ge ett välmotiverat förslag på vilken väg man borde öka kapaciteten på. (3p)

Uppgift 4

Man funderar på hur vaccinationen ska ske i praktiken. Man vill inrätta speciella vaccinationsstationer, men ska de ligga vid vårdcentraler eller vid sjukhus? Låt x_1 ange hur många vaccinationsstationer man inrättar vid vårdcentraler och x_2 hur många vaccinationsstationer man inrättar vid sjukhus. De två typerna av stationerna får olika kapacitet och kostnad. Man vill maximera total kapacitet under bivillkoret att kostnaden inte överstiger den budgeterade, vilket leder till följande linjära heltalsproblem.

$$
\begin{array}{rrl}
\max & z = & 10x_1 + 15x_2 \\
\text{då} & & 7x_1 + 9x_2 \leq 19 \\
 & & x_1, x_2 \geq 0, \text{heltal}
\end{array}
$$

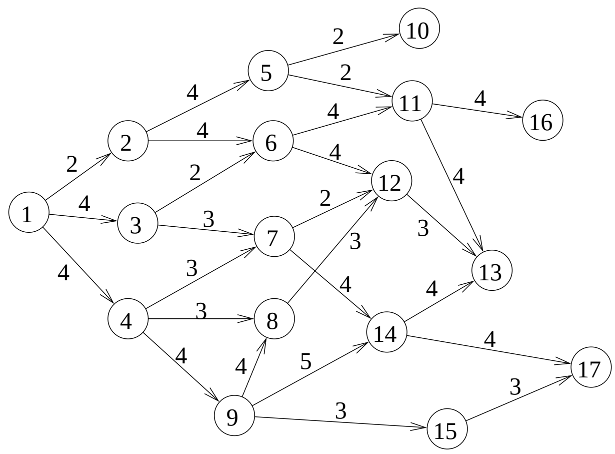
Lös problemet med Land-Doig-Dakins metod. LP-problem får lösas grafiskt. (3p)

Uppgift 5

En oerhört smittsam pandemi drabbar en ort. Man räknar med att alla som blir utsatta för viruset kommer att själva bli smittsamma efter en inkubationstid på minst två dagar. En del blir mycket sjuka, andra märker det knappt, men alla smittar vidare. En smittkedja sker alltså på följande sätt. Person 1, smittad, träffar person 2, ej smittad, och smittar denne. Efter två dagar blir person 2 smittsam, träffar person 3, som smittas, och kan föra smittan vidare två dagar senare.

En forskare kommer på att detta kan åskådliggöras med hjälp av en riktad graf där att möte mellan en smittsam person och en osmittad representeras av en båge som går från den smittsamma till den osmittade. På bågen kan man som “kostnad” ha tiden det tar att utveckla smittsamhet. Om två smittsamma personer träffar en osmittad, blir ju personen smittad vid första tillfället. Detta gör att man kan se det som att smittan helt enkelt följer billigaste väg framåt i grafen.

Man har i efterhand konstruerat följande graf i ett försök att rekonstruera hur smittan spreds. I början är enbart personen som motsvaras av nod 1 smittad. Bågkostnaderna är uppskattad inkubationstid. Använd lämplig metod för att avgöra när de olika personerna blev smittade/smittsamma och av vem. Beskriv stegen i metoden noggrant. Ange vid vilken tidpunkt alla i orten är smittade. (3p)



Uppgift 6

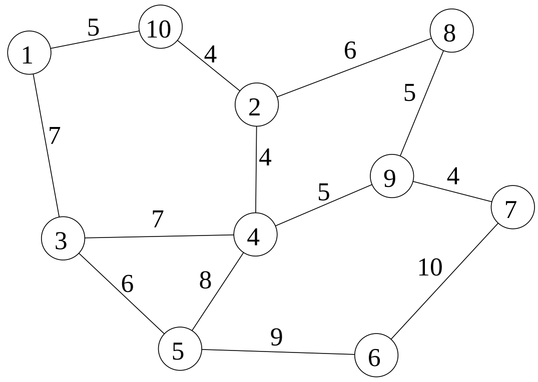
Fotbollslaget på den lilla orten Åtsmalaberg får sina första fall av en aktuell pandemi, samtidigt som man får chansen att via kvalspel gå upp till en högre division. Man försöker skjuta upp matchen, men riksförbundet säger nej, eftersom man bara har fem månader på sig att sköta det administrativa med att flytta upp ett lag till högre division. Laget vill inte lämna walkover, utan bestämmer sig för att snabbt som ögat rekrytera några nya spelare. Man hittar fyra kandidater, men har en mycket begränsad budget, och vissa andra begränsningar beroende på de olika spelarnas skicklighetsprofil. Man sätter upp följande optimeringsproblem, där $x_j = 1$ om man väljer att rekrytera spelare j. Målfunktionen är att maximera förväntad sannolikhet att vinna kvalet.

$$\begin{array}{llrcrcrcrcll}
\max & z = & 10x_1 & + & 7x_2 & + & 11x_3 & + & 5x_4 & & & \\
\text{då} & & 3x_1 & + & 2x_2 & + & 4x_3 & + & 2x_4 & \leq & 5 & (1) \\
& & 5x_1 & + & 4x_2 & + & 5x_3 & + & 3x_4 & \leq & 9 & (2) \\
& & 3x_1 & + & 2x_2 & + & 2x_3 & & & \leq & 4 & (3) \\
& & & & 3x_2 & + & 3x_3 & + & 2x_4 & \leq & 5 & (4) \\
& & x_1, & & x_2, & & x_3, & & x_4 & \in & \{0,1\} &
\end{array}$$

Lös problemet med Balas metod. Förgrena över den första ofixerade variabeln. (3p)

Uppgift 7

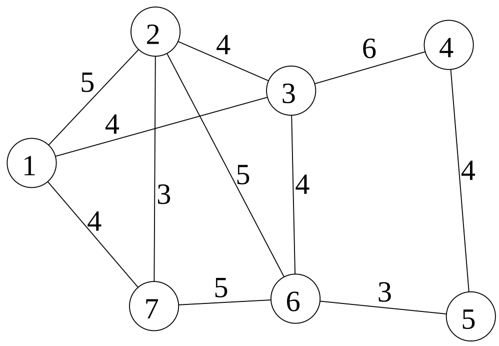
I en stad långt borta på en fjärran kontinent har man infört utegångsförbud pga. en pandemi. Dryga böter väntar den som bryter mot förbudet. En ensam poliskonstapel har satts att se till att utegångsförbudet efterföljs. Han har fått order om att genomsöka varje gata i staden på jakt efter syndare. Gatunätet visas i följande graf, där nod 1 är polisstationen. På varje båge i grafen står tiden det tar att undersöka den, dvs. för konstapeln att gå längs med den. Konstapeln vill bli färdig så tidigt som möjligt.



Vilket optimeringsproblem blir detta? Finn en optimallösning till problemet. Beskriv stegen i metoden noggrant. Ange rundtur och total tid. Vilka gator kommer att passeras mer än en gång? (3p)

Uppgift 8

Farmor måste göra några ärenden, under pågående pandemi. Hon tillhör flera riskgrupper, men har överlevt värre saker än detta, anser hon. Hon ska gå till optikern, apoteket, telebutiken mm. Frågan är vilken väg hon ska ta. I vanliga fall hade hon tagit den närmaste vägen, men nu är det mer smittorisk på vissa platser än andra, och sådant måste man ju ta hänsyn till. Så hon plockar fram sina uråldriga optimeringskunskaper och ritar en graf över möjliga vägar, där nod 1 är hemmet. Bågkostnaderna baserar hon på avstånd, men också på smittorisk. Noderna är de platser hon ska besöka, och hon vill givetvis avsluta turen hemma.



Vilket känt optimeringsproblem är det att finns den bästa rundturen? Finn en bra lösning med en känd heuristik. Finn även en undre gräns för det optimala målfunktionsvärdet genom att lösa en relaxation av problemet. Ange hur långt ifrån optimum den erhålla lösningen i värsta fall är. Formulera ett linjärt bivillkor som skär bort optimallösningen till relaxationen, men ingen tillåten rundtur. (3p)

Uppgift 9

En andra våg av en pandemi drabbar staden samtidigt som sjukvårdspersonalen börjar återhämta sig från slitet under den första vågen. Man inser att vissa personer trots allt måste få sin uppskjutna semester, annars kanske de inte orkar, utan blir sjukskrivna. Speciellt tittar man på fem sjuksköterskor som måste få en veckas semester var. Frågan är bara vilken vecka varje person ska ha. Man bestämmer att en person ska ha semester i taget, och att man under fem veckor får klara sig med en person mindre. Man antar att de fem veckorna kommer att innebära olika stadier i förloppet, först anstormning av lindrigt sjuka, sedan urskiljning av vilka som blir allvarligt sjuka, långsamt ökande belastning på intensivvården, osv. Detta betyder att sjuksköterskornas olika kompetens kommer att betyda olika mycket de olika veckorna. I nedanstående matris har man uppskattat "kostnaden" för sjukhuset att ha varje person (rad) borta varje vecka (kolumn), och man vill givetvis finna den tillordning som minimerar totalkostnaden.

$$C = \begin{pmatrix} 9 & 7 & 15 & 18 & 15 \\ 8 & 8 & 17 & 19 & 14 \\ 8 & 9 & 16 & 19 & 14 \\ 9 & 5 & 14 & 17 & 15 \\ 7 & 6 & 15 & 18 & 15 \end{pmatrix}$$

a) Lös problemet med lämplig metod. Ange optimal lösning samt målfunktionsvärde. Ange även dual optimallösning och kontrollera starka dualsatsen. (2p)

b) Man inser att pandemin inte förflyter som planerat, utan blir värre, så alla kostnader vecka 4 ökas med 5 och alla kostnader vecka 5 ökas med 10. Dessutom börjar sköterska 1 uppvisa tecken på trötthetssyndrom, så alla kostnader i rad 1 ökas med 4. Kommer detta att förändra den primala optimallösningen? I så fall hur? Kommer detta att förändra den duala optimallösningen? I så fall hur? (Lös inte om.) (1p)