Matematiska institutionen
Optimeringslära

TENTAMEN

TAOP33/TEN 2
KOMBINATORISK OPTIMERING GRUNDKURS

Datum:	27 augusti 2021
Tid:	14.00-19.00
Hjälpmedel:	Miniräknare
	Kurslitteratur: Kaj Holmberg: *Optimering*
	Anteckningar i boken får förekomma.
Antal uppgifter:	9
Antal sidor:	8
	Uppgifterna är *inte* ordnade efter svårighetsgrad.
	Totalt antal poäng är 40. För godkänt krävs 16 poäng.
Examinator:	Kaj Holmberg
Jourhavande lärare:	Kaj Holmberg, tel 013-282867

Resultat meddelas per e-post

Tentamensinstruktioner

När Du löser uppgifterna

Redovisa dina beräkningar och din lösningsmetodik noga.
Motivera alla påståenden du gör.
Använd de standardmetoder som ingår i kursen.

Skriv endast på ena sidan av lösningsbladen. Använd inte rödpenna.
Behandla endast en huvuduppgift på varje blad.

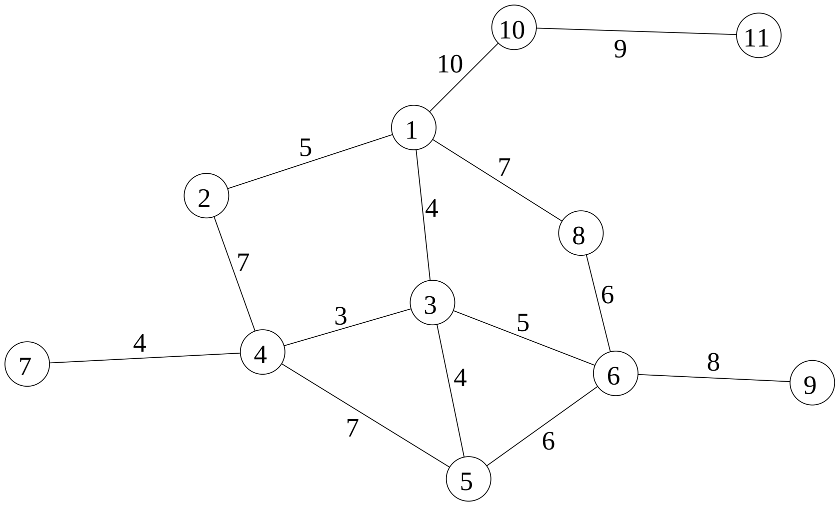
Vid skrivningens slut

Sortera dina lösningsblad i uppgiftsordning.
Markera på omslaget vilka uppgifter du behandlat.
Kontrollräkna antalet inlämnade blad och fyll i antalet på omslaget.

Uppgift 1

Man ska anordna en större marknad i en liten stad på Östgötaslätten, efter ett par års uppehåll på grund av en pandemi. Tyvärr har flera viktiga personer i planeringsgruppen bytt arbete och flyttat från bygden. Därför saknar man plötsligt viktig kompetens. (Det vill säga man har glömt hur man brukar göra.) Man vänder sig därför till ett universitet i närheten för att få hjälp med planeringen.

a) Dagen efter marknaden ska alla gator där marknaden pågått städas. Nedanstående graf visar marknadsgatorna. Antag att en gata blir städad av att sopmaskinen kör en gång längs hela gatan, i valfri riktning. Vilket känt optimeringsproblem är det att städa alla dessa gator så snabbt som möjligt med en sopmaskin? Koefficienterna på bågarna är avstånd, och vi antar att maskinen kör med konstant hastighet (oavsett om den sopar eller inte).

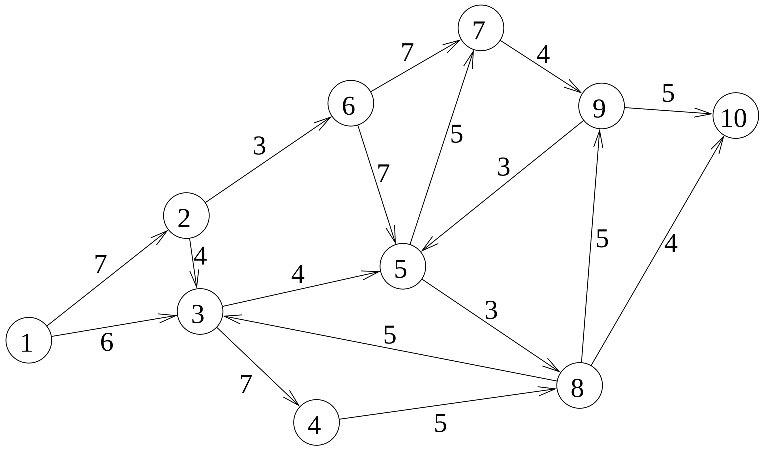


Problemet kan reduceras genom eliminering av bågar där ena ändnoden har valens ett. Förklara varför, och genomför reduktionen. (2p)

b) Lös optimeringsproblemet i uppgift a med lämplig metod. Utnyttja resultatet av uppgift a. (Det är även tillåtet att lösa problemet utan reduktion, men det blir jobbigare.) Ange det totala avståndet maskinen får tillryggalägga, inklusive det som reducerades i uppgift a. (3p)

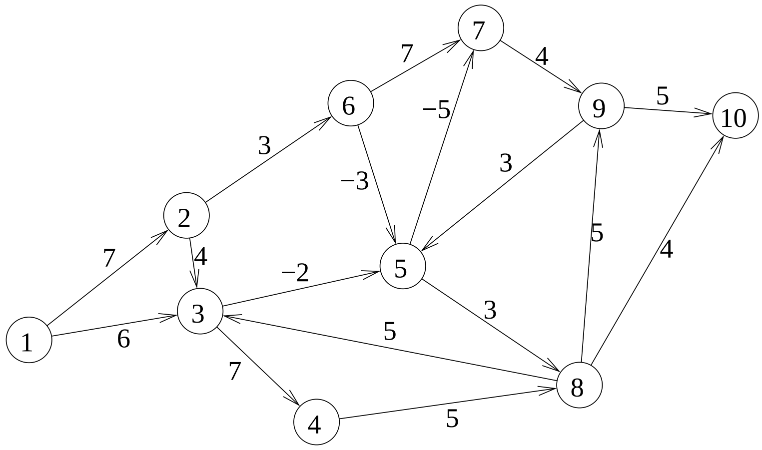
Uppgift 2

Det händer ibland att en polisbil måste förflyttas från gatan bakom torget (där den nu nedlagda polisstationen låg) till tivoliområdet. Att köra på marknadsgatorna är inte förbjudet för en polisbil, men går väldigt långsamt. Följande graf anger vilka vägar som kan användas och vilken tid varje länk tar.



a) Finna kortaste (snabbaste) väg från nod 1 till nod 10. Ange bästa väg, samt hur lång tid det tar att komma fram. (2p)

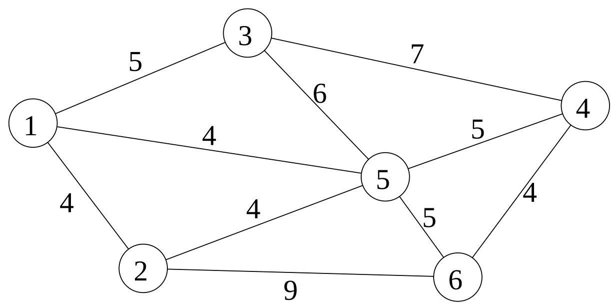
b) Man har ibland problem med ficktjuvar, och tror att det verkar avskräckande om en polisbil visar sig, så det kan finnas en fördel med att ta marknadsgatorna. Man beräknar därför en hopvägd kostnad för varje gata (i princip nackdelen med att det tar lång tid minus fördelen av att visa sig där). Finna bästa väg från nod 1 till nod 10. Ange optimal väg och målfunktionsvärde. (2p)



c) Betrakta lösningen i uppgift a. Hur mycket måste man sänka kostnaden (tiden) på länk (6,7) för att optimala vägen ska förändras? (1p)

Uppgift 3

Agda vill åka alla karuseller som finns på tivoliområdet. Agdas pappa Arne vet att Agda blir trött av att gå för mycket, och vill därför använda den kortaste rundturen som börjat och slutar i nod 1 (där bilen är parkerad) och besöker varje nod (karusell) en gång, i nedanstående graf. På bågarna står avstånd.



Vilket optimeringsproblem är detta? Finn en bra tur med en lämplig heuristik. Finn även en undre gräns för den totala sträckan genom att lösa en lämplig relaxation av problemet. Jämför gränserna. (3p)

Uppgift 4

Den marknadsansvarige funderar på hur mycket plats som ska användas till olika sorts verksamhet. Förutom vissa unika produkter är det mycket godis, väskor och kläder som knallar vill sälja. Om man låter x_1 vara hur många kvadratmeter som hyrs ut till försäljning av godis, x_2 till försäljning av väskor och x_3 till försäljning av kläder, kan man formulera följande optimeringsmodell. Målfunktionen är att maximera vinsten för både marknadsorganisationen och knallarna. Bivillkoren avser att göra fördelningen resonabel. Att t.ex. låta all yta gå till godis skulle inte ge en trevlig och attraktiv marknad.

$$
\begin{array}{llrcrcrcrl}
\max & z = & 4x_1 & + & 3x_2 & + & 5x_3 & & & \\
\text{då} & & x_1 & + & x_2 & + & x_3 & \leq & 12 & (1) \\
& & x_1 & & & & & \leq & 4 & (2) \\
& & & & x_2 & & & \leq & 6 & (3) \\
& & & & & & x_3 & \leq & 5 & (4) \\
& & x_1, & & x_2, & & x_3 & \geq & 0 &
\end{array}
$$

a) Lös LP-problemet med simplexmetoden. Ange optimallösning och målfunktionsvärde. Vilka bivillkor blir aktiva? (3p)

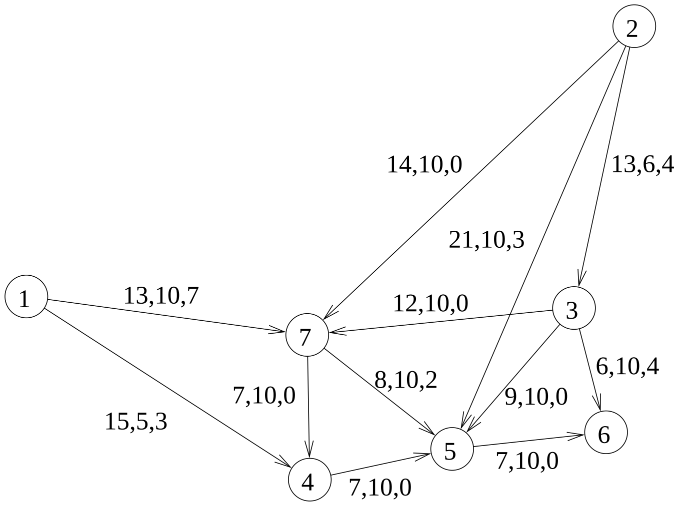
b) Ange skuggpriset för varje bivillkor och förklara vad det betyder. (1p)

c) Man inser att försäljning av mat för omedelbar förtäring också är en stor del av marknaden, och borde tas med som variabel. Den variabeln skulle få koefficient 1 i det första bivillkoret och noll i de andra. Vinstkoefficienten skulle bli 3. Skulle lösningen förändras av detta? (1p)

Uppgift 5

Innan marknaden börjar ska ett större antal träställningar till marknadsstånd transporteras ut till sina positioner, och monteras. Efter marknaden ska de demonteras, och transporteras tillbaka till sina förråd, där de ligger resten av året. I förrådet i nod 1 ligger 1000 ställningar och i nod två ligger 700 ställningar. Den första transportinsatsen är att leverera 300 till till korsningen i nod 4, 500 till nod 5, 400 till nod 6 och 500 till nod 7. (Tips: Räkna i hela hundratal.)

Kostnaden för transporterna (per 100-tal) och övre gräns (också i 100-tal) anges i följande nätverk. Ett förslag på hur transporterna ska göras anges också.



a) Kontrollera mha. simplexmetoden för nätverk om det föreslagna flödet hade minimal kostnad. (2p)

b) Nätverket bygger på läget före pandemin, och vissa vägar har byggts om lite sedan dess. Specifikt har vägen (2,7) gjorts bredare och snabbare, så kostnaden sjunker till 10. Finn en ny minkostnadslösning med simplexmetoden för nätverk. Starta med flödet i uppgift a. (2p)

c) Man hade förväntat sig att det skulle gå ett visst flöde på både (4,5). Hur mycket skulle man förlora i kostnad (per 100-tal) på att använda den bågen? Utgå från optimalt basträd och nodpriser i uppgift b. Någon iteration behöver inte göras. (1p)

d) Utgå från optimallösningen i uppgift b. För vilken båge skulle man tjäna mest på att öka övre gränsen med ett? (1p)

Uppgift 6

På tivoliområdet finns åkattraktioner (karuseller mm) och spelstånd (tombola, lotterier, pilkastning mm). Man funderar på vilken som är bästa blandningen av dessa två kategorier.

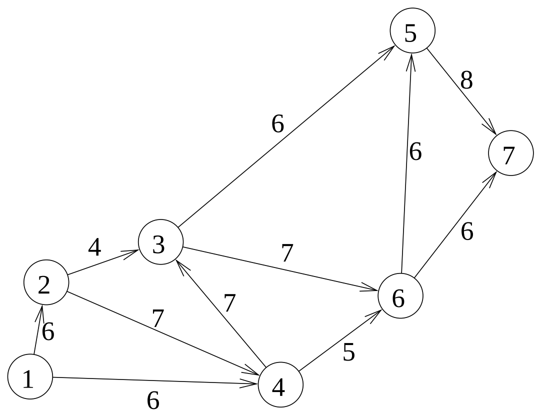
Låt x_1 ange antal åkattraktioner, och x_2 antal spelstånd. Man formulerar följande linjära heltalsproblem för att finna bästa fördelningen. Det finns bivillkor för tillgänglig yta, tillgänglig mängd el och tillgänglig plats vid gångstråket.

$$\begin{array}{lll} \max & z = & 5x_1 + 8x_2 \\ \text{då} & & 5x_1 + 3x_2 \leq 40 \\ & & 2x_1 + x_2 \leq 15 \\ & & x_1 + 2x_2 \leq 12 \\ & & 0 \leq x_1 \leq 7, \ \text{heltal} \\ & & 0 \leq x_2 \leq 7, \ \text{heltal} \end{array}$$

Lös problemet med Land-Doig-Dakins trädsökningsmetod. Tvådimensionella LP-problem får lösas grafiskt. Ange lösning och målfunktionsvärde. Motivera optimalitet noggrant. (3p)

Uppgift 7

Om det kommer många besökare, kan det bli fullt av fotgängare på gatorna. Ibland blir det helt stopp, vilket många tycker är obehagligt. För att evaluera situationen, vill man kolla upp de värsta fallen. En situation man tittar på är hur många som kan ta sig från stationen, nod 1, till tivolit, nod 7, under en bestämd tid. Alla marknadsbesökare antas gå via marknadsgatorna, och man har uppskattat hur många som kan passera en viss gata (under den aktuella tiden). Denna uppskattning (i hundratal) står på bågarna i följande graf.



a) Hur många fotgängare (under den aktuella tiden) kan maximalt ta sig från nod 1 till nod 7, och hur fördelas de över gatorna? Använd standardmetod och beskriv alla steg noga. Ange minsnitt, dvs. vilka gator som begränsar flödet. (3p)

b) Man funderar på att leda om visst flöde med hjälp av hänvisningsskyltar i nod 3 som visar snabbaste väg utanför marknadsområdet till tivolit, nod 7. Det skulle alltså motsvara en båge (3,7) som inte har någon övre gräns. Skulle maxflödet ökas av detta? Motivera. (1p)

Uppgift 8

Fem lokalbor ska turas om att stå i ett stånd som säljer hemmagjorda pryd-nadsföremål. Kiosken ska vara bemannad de 10 timmarna från kl 10 till kl 20, så varje person måste stå där 2 timmar. Passen blir då 10-12, 12-14, 14-16, 16-18 och 18-20.

Varje person får ange sin ovilja att arbeta ett visst pass, se följande matris där rader motsvarar passen och kolumnerna personerna, och man har kommit överens om att det vore rättvist att minimera den totala oviljan.

$$C = \begin{pmatrix} 8 & 8 & 9 & 14 & 16 \\ 13 & 12 & 15 & 10 & 14 \\ 16 & 8 & 12 & 5 & 19 \\ 7 & 14 & 9 & 11 & 13 \\ 16 & 11 & 14 & 6 & 15 \end{pmatrix}$$

a) Lös problemet med ungerska metoden. Ange optimal lösning samt målfunktions-värde. Ange även dual optimallösning och kontrollera starka dualsatsen. (3p)

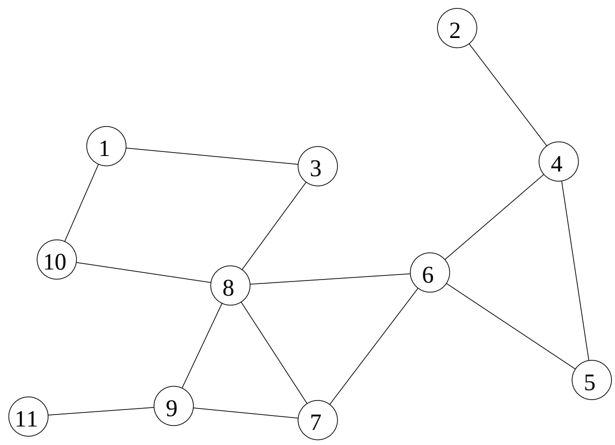
b) En (ung) person tycker inte om att stå och sälja fåniga småprylar som ser ut att vara gjorda på dagis, utan vill hellre åka karusell hela tiden. Ingen övre gräns har givits på vilken ovilja man kan ange, så personen höjer sin ovilja för alla pass med 1000. Hur påverkas primal och dual lösning av detta? Blir personen nöjd? (1p)

Uppgift 9

Ibland står en ensam knalle (försäljare) i ett stånd, och då blir det lite besvärligt om den personen behöver gå iväg en stund, t.ex. för att äta lunch, gå på toa, eller bara spatsera runt på marknaden för att se andra stånd. Tidigare har personen behövt stänga sitt stånd, vilket inte gillas av marknadsledningen. Nu vill man hjälpa till i denna situation, genom att para ihop ensamma knallar två och två, så att man kan turas om att hålla koll på de två stånden. Genom att hjälpas åt, ska inget stånd behöva stängas.

Man gör en lista över all knallar som behöver den hjälpen, och noterar vilka som kan hjälpa varandra. Stånden måste ligga nära varandra, och knallarna får inte vara osams.

Det hela resulterar i följande graf, där noderna motsvarar knallar, och bågarna markerar knallar som kan hjälpas åt.



Man vill alltså plocka ihop knallarna i par, som ska samarbeta. Varje knalle ska ha koppling till högst en en annan. Man vill ha så många par som möjligt.

a) Vad är det för optimeringsproblem? Finn en så bra lösning som möjligt med en känd metod. Starta med paren (1,3), (4,5), (6,7), (8,9). Visa stegen i metoden. Kan flera par bildas? (3p)

b) Finn en övre och en undre gräns för det optimala antalet färger i en nodfärgning med minimalt antal färger i ovanstående graf. (1p)

c) Finn en övre och en undre gräns för det optimala antalet färger i en bågfärgning med minimalt antal färger i ovanstående graf. (1p)