Matematiska institutionen
Optimeringslära

TENTAMEN

TAOP33/TEN 1
KOMBINATORISK OPTIMERING GRUNDKURS för D, C och IT

Datum:	12 januari 2010
Tid:	8.00-13.00
Hjälpmedel:	Miniräknare Kurslitteratur: Kaj Holmberg: *Kombinatorisk optimering med linjärprogrammering.* Anteckningar i normal omfattning får förekomma i boken.
Antal uppgifter:	5
Antal sidor:	4 Uppgifterna är *inte* ordnade efter svårighetsgrad. Totalt antal poäng är 40. För godkänt krävs normalt 16 poäng. Godkända laborationer ger 5 poäng som adderas till skrivningsresultatet.
Examinator:	Kaj Holmberg
Jourhavande lärare:	Kaj Holmberg, tel 013-282867

Resultat meddelas per e-post

Tentamensinstruktioner

När Du löser uppgifterna

Redovisa dina beräkningar och din lösningsmetodik noga.
Motivera alla påståenden du gör.
Använd de standardmetoder som ingår i kursen.

Skriv endast på ena sidan av lösningsbladen. Använd inte rödpenna.
Behandla endast en huvuduppgift på varje blad.

Vid skrivningens slut

Sortera dina lösningsblad i uppgiftsordning.
Markera på omslaget vilka uppgifter du behandlat.
Kontrollräkna antalet inlämnade blad och fyll i antalet på omslaget.

Uppgift 1

Betrakta följande LP-problem.

$$\begin{array}{llrcrcrcl} \max & z = & 3x_1 & + & 2x_2 & + & x_3 & & \\ \text{då} & & 2x_1 & + & x_2 & + & x_3 & \leq & 4 \\ & & x_1 & + & x_2 & & & \leq & 2 \\ & & x_1 & , & x_2 & , & x_3 & \geq & 0 \end{array}$$

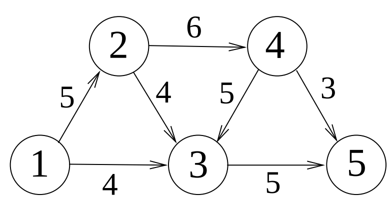
(4p) a) Lös problemet med simplexmetoden. Ange optimallösning samt vilka bivillkor som är aktiva i optimum. Är erhållen baslösning degenererad? Är optimallösningen unik?

(4p) b) Skriv upp LP-dualen till problemet ovan. Beräkna grafiskt optimal duallösning. Jämför med resultatet i uppgift a. Visa att komplementaritetsvillkoren är uppfyllda. Är den duala optimallösningen unik? Vilka duala bivillkor är aktiva?

(3p) c) Origo, dvs. $x_1 = 0$, $x_2 = 0$, $x_3 = 0$, utgör en baslösning i ovanstående problem. Är den tillåten? Vilka variabler är basvariabler i denna punkt? Beräkna den duala punkt som uppfyller komplementaritetsvillkoren tillsammans med origo. Är den duala punkten tillåten i dualen? Vilka slutsatser kan man dra utifrån denna information angående optimalitet?

Uppgift 2

Betrakta nedanstående nätverk med bågkapaciteter.



(3p) a) Finn maxflöde från nod 1 till nod 5. Ange minsnitt.

(1p) b) Hur kan man på ett metodiskt sätt ta reda på om ett minsnitt är unikt?

Uppgift 3

Betrakta nedanstående heltalsproblem.

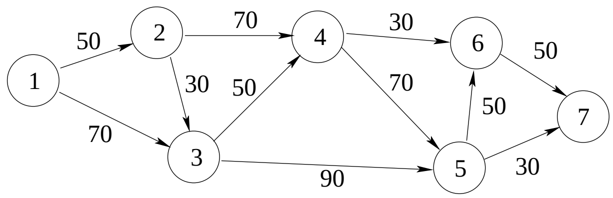
$$\begin{array}{llrcrcl} \max & z = & 7x_1 & + & 3x_2 & & \\ \text{då} & & 2x_1 & + & 3x_2 & \leq & 5 \\ & & x_1 & + & x_2 & \leq & 3 \\ & & 3x_1 & + & 2x_2 & \leq & 5 \\ & & x_1, & & x_2 & \geq & 0, \text{ heltal} \end{array}$$

(3p) a) Lös problemet med Land-Doig-Dakins metod. Det är tillåtet att lösa LP-problemen grafiskt.

(1p) b) Ange de bivillkor som definierar det konvexa höljet av de tillåtna punkterna. Det är tillåtet att använda grafisk motivering.

Uppgift 4

Betrakta nedanstående vägnät.



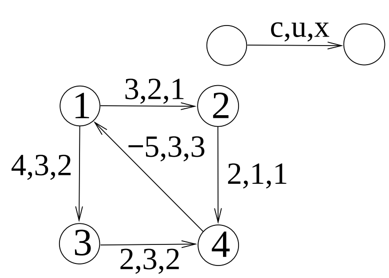
(2p) a) Antag att bågkoefficienterna anger tiden det tar att köra en länk. Finn en snabbaste väg från nod 1 till nod 7. Ge namnet på metoden som används.

(2p) b) Antag att bågkoefficienterna anger hastighetsbegränsning för varje länk. Antag också att man tänker köra med konstant hastighet hela vägen. Finn en väg från nod 1 till nod 7 där man kan köra så fort som möjligt.

(2p) c) Antag att bågkoefficienterna anger kostnad för att bygga en länk, och att varje byggd länk kan användas i båda riktningarna. Finn en billigaste uppsättning länkar som gör att alla noder kan kommunicera med varandra. Ge namnet på metoden som används.

Uppgift 5

Betrakta följande riktade graf, där bågarna märkts med kostnad, kapacitet och flöde. (Alla undre gränser är lika med noll.) Observera att flödet är cirkulerande, dvs. inga noder är källor eller sänkor.

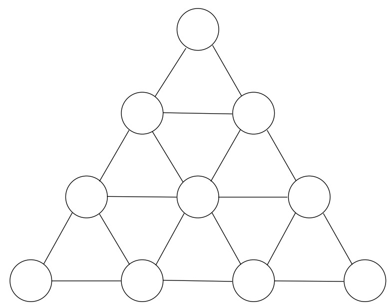


(3p) a) Är flödet det billigaste möjliga? Om inte, finn ett flöde med minimal kostnad.

(1p) b) Antag att man inför en båge från nod 3 till nod 2, med kapacitet 3. För vilka värden på kostnaden för den bågen förändras optimallösningen?

Uppgift 6

Betrakta följande oriktade graf, som ibland kallas *tetraktys* och har av vissa ansetts ha magiska egenskaper. Alla svar på nedanstående frågor måste bevisas/motiveras. (Ledning: Ibland är det enklaste sättet att visa att någonting finns att ge ett exempel på det. Ibland är andra sätt enklare.)



(1p) a) Har grafen en Eulercykel?

(1p) b) Har grafen en Hamiltoncykel?

(1p) c) Är grafen plan?

(1p) d) Är grafen tudelad?

(1p) e) Har grafen en perfekt matchning?

(1p) f) Hur stor är den största klicken i grafen?

(1p) g) Finns det en oberoende nodmängd med fyra noder?

(1p) h) Vilket är det minsta antal färger som krävs för en bågfärgning?

(1p) i) Vilket är det minsta antal färger som krävs för en nodfärgning?

(1p) j) Ger ett snitt runt mittnoden ett maxsnitt?

(1p) k) Ange komplexiteten för frågeställningarna i uppgift a, b, e, och f för en generell graf.