Matematiska institutionen
Optimeringslära

TENTAMEN

TAOP33/TEN 1
KOMBINATORISK OPTIMERING GRUNDKURS för D, C och IT

Datum:	14 augusti 2009
Tid:	8.00-13.00
Hjälpmedel:	Miniräknare Kurslitteratur: Kaj Holmberg: *Kombinatorisk optimering med linjärprogrammering.* Anteckningar i normal omfattning får förekomma i boken.
Antal uppgifter:	7
Antal sidor:	5 Uppgifterna är *inte* ordnade efter svårighetsgrad. Totalt antal poäng är 40. För godkänt krävs normalt 16 poäng. Godkända laborationer ger 5 poäng som adderas till skrivningsresultatet.
Examinator:	Kaj Holmberg
Jourhavande lärare:	Kaj Holmberg, tel 013-282867

Resultat meddelas per e-post

Tentamensinstruktioner

När Du löser uppgifterna

Redovisa dina beräkningar och din lösningsmetodik noga.
Motivera alla påståenden du gör.
Använd de standardmetoder som ingår i kursen.

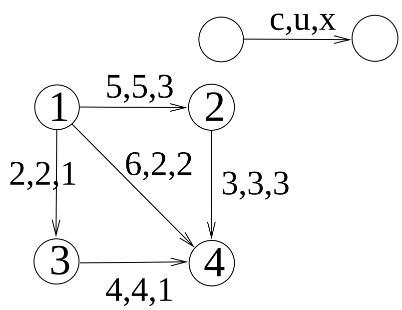
Skriv endast på ena sidan av lösningsbladen. Använd inte rödpenna.
Behandla endast en huvuduppgift på varje blad.

Vid skrivningens slut

Sortera dina lösningsblad i uppgiftsordning.
Markera på omslaget vilka uppgifter du behandlat.
Kontrollräkna antalet inlämnade blad och fyll i antalet på omslaget.

Uppgift 1

Betrakta följande riktade graf, där bågarna märkts med kostnad, kapacitet och flöde. (Alla undre gränser är lika med noll.)



(3p) a) Använd simplex-teknik (för nätverk) för att finna det billigaste sättet att skicka 6 enheter från nod 1 till nod 4. Starta från det angivna flödet. Är optimallösningen unik?

(1p) b) Utgående från resultatet i uppgift a, hur mycket kan man höja kostnaden för båge (1,4) utan att optimallösningen förändras?

(2p) c) Antag att man från okänd källa får en tillåten lösning till ett minkostnadsflödesproblem (som ovan). Hur vet man om det är en baslösning? Dvs. vilka (observerbara) egenskaper hos lösningen skulle kunna göra att den inte är en baslösning? Hur kan man praktiskt förändra en tillåten lösning så att det blir en baslösning?

Uppgift 2

Betrakta nedanstående triviala LP-problem.

$$
\begin{array}{lll}
\max & z = & \sum_{j=1}^{n} x_j \\
\text{då} & & x_j \leq 1 \quad j = 1, \dots n \\
& & x_j \geq 0 \quad j = 1, \dots n
\end{array}
$$

(1p) a) Formulera LP-dualen till problemet.

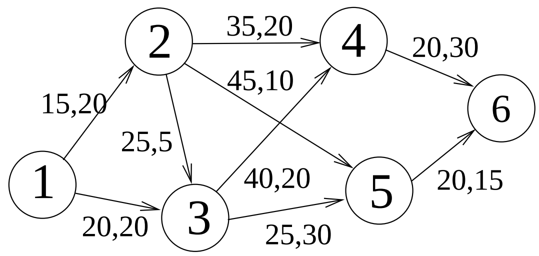
(0p) b) Finn optimal primal och dual lösning.

(2p) c) Bevisa optimalitet noggrant med hjälp av LP-dualitet och komplementaritet.

(1p) d) Kontrollera att starka dualsatsen är uppfylld.

Uppgift 3

Nedanstående nätverk föreställer det relevanta vägnätet för personer som ska färdas från ett bostadsområde (nod 1) till en större arbetsplats (nod 6). Bågarna är märkta med tid (i minuter) för en bilist att i normal hastighet köra vägsträckan, samt uppskattad kapacitet (i bilar per timme).



(1p) a) Finn den snabbaste vägen från nod 1 till nod 6. Hur lång tid tar resan?

(2p) b) Finn det maximala antal bilar som kan köra från nod 1 till nod 6 per timme. Använd känd metod. Ange flöde och minsnitt. Börja med att skicka 20 bilar vägen 1 - 2 - 4 - 6 och 15 bilar vägen 1 - 3 - 5 - 6.

(1p) c) Ett vägarbete gör att tiden för båge (5,6) ökar till 40. Vad blir tiden för den nya snabbaste vägen från nod 1 till nod 6? Vad blir tiden för den tidigare snabbaste vägen från nod 1 till nod 6 (dvs. för de som inte ändrar sitt vägval)?

(2p) d) Ett annat vägarbete gör att båge (3,4) helt stängs av. Hur påverkas maxflödet från nod 1 till nod 6? Hur påverkas tiden för snabbaste väg? (Antag att vägarbetet i uppgift c inte görs samtidigt.)

(2p) e) Ett tredje vägarbete gör att kapaciteten för båge (1,3) minskas till 10, och att tiden ökas till 30. Hur mycket ändras maxflödet från nod 1 till nod 6? (Man behöver inte ange hur flödet går.) Hur påverkas tiden för snabbaste väg? (Antag att vägarbetena i uppgift c och d inte görs samtidigt.)

Uppgift 4

Betrakta nedanstående heltalsproblem.

$$\begin{array}{llrcrcl} \max & z = & 2x_1 & + & 3x_2 & & \\ \text{då} & & 4x_1 & + & 5x_2 & \leq & 8 \\ & & x_1, & & x_2 & \geq & 0, \text{ heltal} \end{array}$$

(3p) a) Lös problemet med Land-Doig-Dakins metod. LP-problem får lösas grafiskt.

(1p) b) Studera problemet grafiskt och ta fram det konvexa höljet av de tillåtna heltalspunkterna. Ange den minimala mängd bivillkor som tillsammans definierar det konvexa höljet.

Uppgift 5

Betrakta ett optimeringsproblem med binära variabler. Genom att studera bivillkoren ett och ett kan man ibland konstatera att det inte är tillåtet att sätta två specifika variabler lika med ett samtidigt.

Antag att man ritar en graf där varje nod motsvarar en variabel i ovanstående problem, och att man ritar in en oriktad båge mellan två noder om det inte är tillåtet att sätta båda dessa variabler lika med ett samtidigt.

(3p) a) Vad betyder en *klick* i denna graf? Vilket är det starkaste linjära bivillkor man kan härleda ur en sådan klick? Vilka för- och nackdelar finns med att påbörja en trädsökningsprocedur med att generera sådana bivillkor?

(1p) b) Antag att hela grafen blir en klick. Hur kan man då på enklaste sätt lösa problemet?

Uppgift 6

Betrakta nedanstående kappsäcksproblem.

$$\begin{array}{llrcl} \max & z = & \sum_{j=1}^{n} c_j x_j & & \\ \text{då} & & \sum_{j=1}^{n} a_j x_j & \leq & b \\ & & x_j & \in & \{0,1\} \quad j = 1, \ldots n \end{array}$$

För vissa värden på koefficienterna blir problemet lättare att lösa. Avgör om så är fallet för nedanstående olika fall, och beskriv i så fall hur man kan utnyttja förenklingen. Dvs. beskriv vad man vet om optimallösningen och hur lösningen av problemet påverkas.

(1p) a) $b = 0$ och $a_j > 0$ för alla j.

(1p) b) $b \geq \sum_{j=1}^{n} a_j$ och $a_j > 0$ för alla j.

(1p) c) $a_j = a$ för alla j, dvs. bivillkorskoefficienten är lika för alla j.

(1p) d) $c_j \leq 0$, $a_j > 0$ för alla j och $b > 0$.

(1p) e) $c_j = a_j$ för alla j.

(1p) f) $c_j = -a_j$ för alla j.

Uppgift 7

Du har sökt och fått sommarjobbet att sköta Allsång på Lillskansen i Gamla Linköping. Självklart vill du då använda dina optimeringskunskaper.

Framför scenen står en grupp av ca 100 personer, och du noterar direkt varje persons position. Antag att alla står stilla tills du instruerar dem att göra något annat.

(1p) a) Vid ett tillfälle ska publiken bilda par, dvs. varje person ska fatta handen på en annan person. Eftersom det är besvärligt att flytta på sig, uppskattar du kostnaden för en parbildning som avståendet mellan de två personerna (innan ev. förflyttning).

Vilket känt optimeringsproblem motsvarar det att finna en parbildning med minsta kostnad?

(1p) b) Betrakta situationen i uppgift a, men med följande skillnad. Hälften av publiken har en röd biljett och hälften har en blå, och varje par ska bestå av en person med röd biljett och en person med blå biljett.

Hur förändras optimeringsproblemet/indata jämfört med uppgift a? Kan man använda en effektivare optimeringsmetod för att lösa det?

(1p) c) Betrakta situationen i uppgift a, men med skillnaden att varje par ska ha samma färg på biljetterna.

Hur förändras optimeringsproblemet/indata jämfört med uppgift a? Blir problemet lättare att lösa?

(1p) d) Vid ett annat tillfälle ska hela publiken bilda en *ring*, dvs. varje person ska fatta händerna på två andra, och alla ska vara i samma ring. Kostnaden beräknas som i uppgift a

Vilket känt optimeringsproblem motsvarar det att finna en ring med minsta kostnad? Vilken komplexitet har problemet?

(3p) e) Betrakta situationen i uppgift d. Välj en metod som passar för problemet. (Tips: Välj en enkel metod. Den får vara heuristisk, men det är inte tillåtet att ignorera målfunktionen helt.)

Din uppgift är nu att från scenen instruera publiken så att de bildar en ring genom att använda din utvalda metod. Tyvärr kan du inte räkna med att någon i publiken kan optimering. Vad ska du säga till publiken? Skriv upp en tydlig instruktion, steg för steg, som publiken kan förstå och följa och som ger önskat resultat.

(1p) f) Antag att ingen ska behöva flytta sig mer än två meter. Personer som har mer än två meter mellan sig ska inte kopplas ihop. Hur förändras indata till optimeringsproblemen i uppgift a och d? Kan din metod i uppgift e misslyckas med att bilda en ring?