Matematiska institutionen
Optimeringslära

TENTAMEN

TAOP33/TEN 1
KOMBINATORISK OPTIMERING GRUNDKURS för D, C och IT

Datum:	12 januari 2010
Tid:	8.00-13.00
Hjälpmedel:	Miniräknare Kurslitteratur: Kaj Holmberg: *Kombinatorisk optimering med linjärprogrammering.* Anteckningar i normal omfattning får förekomma i boken.
Antal uppgifter:	5
Antal sidor:	4 Uppgifterna är *inte* ordnade efter svårighetsgrad. Totalt antal poäng är 40. För godkänt krävs normalt 16 poäng. Godkända laborationer ger 5 poäng som adderas till skrivningsresultatet.
Examinator:	Kaj Holmberg
Jourhavande lärare:	Kaj Holmberg, tel 013-282867

Resultat meddelas per e-post

Tentamensinstruktioner

När Du löser uppgifterna

Redovisa dina beräkningar och din lösningsmetodik noga.
Motivera alla påståenden du gör.
Använd de standardmetoder som ingår i kursen.

Skriv endast på ena sidan av lösningsbladen. Använd inte rödpenna.
Behandla endast en huvuduppgift på varje blad.

Vid skrivningens slut

Sortera dina lösningsblad i uppgiftsordning.
Markera på omslaget vilka uppgifter du behandlat.
Kontrollräkna antalet inlämnade blad och fyll i antalet på omslaget.

Uppgift 1

Betrakta följande LP-problem, kallat P1.

$$
\begin{array}{lrcrcll}
\max & z = 3x_1 & + & 2x_2 & & & \\
\text{då} & x_1 & + & x_2 & \leq & 5 & \quad (1) \\
 & 2x_1 & + & x_2 & \leq & 6 & \quad (2) \\
 & x_1 & , & x_2 & \geq & 0 &
\end{array}
$$

(1p) a) Avgör grafiskt om det är optimalt att låta båda bivillkoren, 1 och 2, vara uppfyllda med likhet.

(3p) b) Lös problem P1 med simplexmetoden. Ange optimallösning.

(1p) c) Antag att man får öka ett av högerleden lite. Vilket borde man välja och varför?

(2p) d) För vilka värden på c_2 är lösningen i uppgift b fortfarande optimal? För vilka värden på c_2 är $x_2 = 0$ i en optimallösning?

(1p) e) Låt P2 vara det problem som fås om man kräver att variablerna måste vara heltal i problem P1. Ange optimallösning till P2. Motivera optimalitet noga.

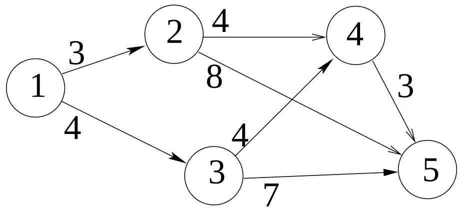
(3p) f) Låt P3 vara det problem som fås om man dividerar högerleden för bivillkor 1 och 2 i problem P2 med 2 (dvs. halverar dem). Inga andra ändringar av problemet får göras. Lös problem P3 med Land-Doig-Dakins metod. Gå ner i $\leq$-grenen först. (LP-problem får här lösas grafiskt.)

(2p) g) Optimaltablån till LP-relaxationen av P3 fås helt enkelt genom att dividera högerledet i optimaltablån till P1 (i uppgift b) med 2. Försök att ta fram ett Gomory-snitt ur den tablån. Ange snittet eller beskriv varför det inte går.

(1p) h) Skuggpriser för LP-problem används för att göra viss känslighetsanalys. Kan man göra det för heltalsproblem? Utgå från definitionen av skuggpriser och ange skuggpriser för optimallösningen i uppgift f.

Uppgift 2

Betrakta nedanstående riktade graf med bågkostnader.



(2p) a) Finn en billigaste väg från nod 1 till nod 5.

(1p) b) Antag att man vill att båge (2,5) ska ingå i en billigaste väg från nod 1 till nod 5. För vilka värden på kostnaden för båge (2,5) blir detta uppfyllt. (Alla andra bågkostnader är oförändrade.)

(3p) c) Betrakta det minkostnadsflödesproblem som fås om man ska skicka 10 enheter från nod 1 till nod 5, och varje båge har undre gräns noll och övre gräns 11 förutom båge (3,5) som har övre gräns 2. Starta med lösningen $x_{12} = 8$, $x_{24} = 8$, $x_{45} = 8$, $x_{13} = 2$, $x_{25} = 0$, $x_{34} = 0$, $x_{35} = 2$, och finn optimalt flöde med simplexmetoden i nätverk.

(3p) d) Antag att bågkoefficienterna anger kapaciteten för varje båge. Finn maxflöde från nod 1 till nod 5. Ange minsnitt. Vilken båge vore det mest värdefullt att öka kapaciteten för? Vet man att maxflödet ökar om man ökar kapaciteten för en båge i minsnittet? Vet man att maxflödet minskar om man minskar kapaciteten för en båge i minsnittet?

Uppgift 3

Betrakta en fullständig, oriktad graf med n noder, kallad K_n. (Antag $n \geq 2$.) Svaren på följande frågor kan vara "Ja", "Nej" eller "Det är *NP*-svårt/fullständigt att ta reda på", samt kan bero på värdet på n. Samtliga svar ska motiveras ordentligt. (Ledning för vissa frågor: K_n innehåller K_{n-1}.)

(1p) a) Har grafen en Eulercykel?

(1p) b) Har grafen en Hamiltoncykel?

(1p) c) Är grafen plan?

(1p) d) Är grafen tudelad?

(1p) e) Har grafen en perfekt matchning?

(1p) f) Finns det en oberoende nodmängd med tre noder?

(1p) g) Finns det en nodfärgning med $n-1$ färger?

(1p) h) Ger ett snitt runt $\lfloor n/2 \rfloor$ noder ett maxsnitt?

Uppgift 4

Betrakta nedanstående LP-problem.

$$\begin{aligned} \max \quad z = & \sum_i \alpha_i + \sum_j \beta_j \\ \text{då} \quad & \alpha_i + \beta_j \leq c_{ij} \quad \forall i, j \end{aligned}$$

(1p) a) Vilken struktur har optimallösningen till LP-dualen av ovanstående problem?

(1p) b) Är bivillkorsmatrisen fullständigt unimodulär?

(2p) c) Lös problemet för $c = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 5 \end{pmatrix}$.

Uppgift 5

Betrakta ett hinkpackningsproblem, där de 8 objekten med vikterna (i kg) 3, 6, 7, 4, 3, 8, 9, 7, ska packas ner i identiska hinkar som var och en inte klarar mer än 10 kg.

(1p) a) Ange en undre gräns för hur många hinkar som behövs.

(2p) b) Välj en känd (bra) heuristik och applicera den på problemet. (Sortera inte objekten.)

(2p) c) Sortera först objekten. Applicera sedan samma heuristik som ovan. Fås en optimallösning?