Matematiska institutionen
Optimeringslära

TENTAMEN

TAOP33/TEN 1
KOMBINATORISK OPTIMERING GRUNDKURS för D och C

Datum:	31 maj 2010
Tid:	14.00-19.00
Hjälpmedel:	Miniräknare Kurslitteratur: Kaj Holmberg: *Kombinatorisk optimering med linjärprogrammering.* Anteckningar i normal omfattning får förekomma i boken.
Antal uppgifter:	4
Antal sidor:	4 Uppgifterna är *inte* ordnade efter svårighetsgrad. Totalt antal poäng är 40. För godkänt krävs normalt 16 poäng.
Examinator:	Kaj Holmberg
Jourhavande lärare:	Kaj Holmberg, tel 013-282867

Resultat meddelas per e-post

Tentamensinstruktioner

När Du löser uppgifterna

Redovisa dina beräkningar och din lösningsmetodik noga.
Motivera alla påståenden du gör.
Använd de standardmetoder som ingår i kursen.

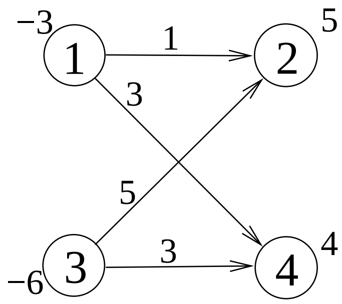
Skriv endast på ena sidan av lösningsbladen. Använd inte rödpenna.
Behandla endast en huvuduppgift på varje blad.

Vid skrivningens slut

Sortera dina lösningsblad i uppgiftsordning.
Markera på omslaget vilka uppgifter du behandlat.
Kontrollräkna antalet inlämnade blad och fyll i antalet på omslaget.

Uppgift 1

Betrakta följande riktade graf, där bågarna märkts med kostnad. Alla undre gränser är lika med noll och alla övre gränser är lika med 100. Nod 1 är en källa av styrka 3, nod 2 en sänka av styrka 5, nod 3 en källa av styrka 6 och nod 4 en sänka av styrka 4 (vilket också har angetts i grafen).



(3p) a) Använd simplexteknik (för nätverk) för att finna det billigaste sättet att skicka efterfrågad mängd. Starta med flödet $x_{14} = 3$, $x_{32} = 5$, $x_{34} = 1$. Ange totalkostnad.

(2p) b) I uppgift a skickades totalt 9 enheter från vänstersidan till högersidan. Om man ökar källstyrkan i nod 1 med en enhet (till −4) och sänkstyrkan i nod 4 med en enhet (till 5), ökar totala flödet från vänster till höger till 10 enheter. Eftersom alla kostnader är positiva, borde väl totalkostnaden öka då man skickar mer? Kontrollera om det är så genom att finna nya optimallösningen. Starta från optimalbasen i uppgift a. Ange totalkostnaden.

(2p) c) Ange samtliga tillåtna baslösningar till problemet ovan.

Uppgift 2

Betrakta nedanstående LP-problem.

$$
\begin{array}{llrcrcl}
\max & z = & 4x_1 & + & 3x_2 & & \\
\text{då} & & 4x_1 & + & 3x_2 & \leq & 5 \\
 & & 4x_1 & + & 2x_2 & \leq & 4 \\
 & & x_1, & & x_2 & \geq & 0
\end{array}
$$

(2p) a) Är det optimala målfunktionsvärdet större än 5? Är det optimala målfunktionsvärdet mindre än 5? Motivera utan att lösa problemet.

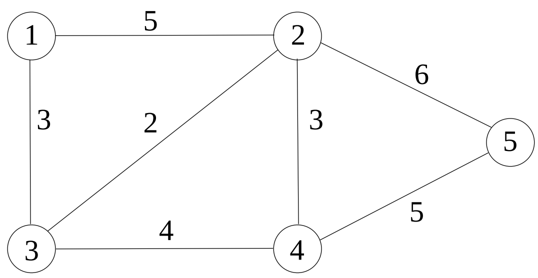
(3p) b) Lös problemet med simplexmetoden. Ange primal och dual optimallösning.

(2p) c) Finns det en optimalpunkt som inte är extrempunkt? Om ja, ange en sådan. Om nej, motivera.

(2p) d) Formulera LP-dualen till problemet ovan.

Uppgift 3

Nedanstående nätverk föreställer vägnätet i den lilla byn Hyggebyen i nordöstra Danmark. Varje nod är ett hus. Koefficienten på varje båge anger vägens längd.



(2p) a) Man ska införa elektricitet i byn, och därför koppla in alla husen. Anslutningen till stomlinjen ligger vid nod 1 (Jensens hus). Elkablarna kan bara dras längs med vägarna, och kostnaden för att dra en kabel längs en väg är proportionell mot vägens längd. Finn det billigaste elnätet som försörjer alla husen i byn.

(1p) b) Byns buse, Jesper, har köpt en raggarbil, och tänker åka runt i byn. Han vill finna en runda som passerar varje hus i byn, men som är så kort som möjligt. (Jespers bil drar ca 3 liter milen.) Han vill inte köra samma väg två gånger under en runda. Tala om för Jesper vilket känt optimeringsproblem detta är. Tala även om för Jesper om han kan förvänta sig att hitta en optimallösning i polynomisk tid (som funktion av antalet hus) om han skulle åka i en väldigt stor stad?

(1p) c) Finn ett 1-träd i Hyggebyen och ge Jesper en undre gräns för hur lång hans raggarrunda blir.

(1p) d) Ulrik, byns beläste, berättar för Jesper att det finns något som heter närmaste granne-heuristiken, och Jesper bestämmer sig för att använda den för att försöka hitta en bra runda. Han har bilen i Jensens garage. Beskriv vad som händer och vilken lösning som fås.

(2p) e) Jesper tröttnar på konstiga algoritmer och bestämmer sig för att ta fram alla olika sätt att köra runt enligt förutsättningarna i uppgift b. Ta fram samtliga tillåtna lösningar, och motivera noggrant varför inte fler finns.

(3p) f) Det har snöat i tre veckor (och ingen har dubbdäck i Danmark) så man hjälps åt att fästa en snöplog längst fram på Jespers bil. Jesper får i uppdrag att ploga alla vägarna. Med snöplog på drar Jespers bil närmare 4 liter milen. Vad är det för optimeringsproblem? Hur bör han köra?

(1p) g) Man ska måla sina hus. Ingen vill ha samma färg som en närliggande granne, men man vill minimera antalet färger i byn (eftersom det blir lite billigare). Vad är det för optimeringsproblem? Hur många färger krävs, och hur ska man måla husen?

(1p) h) Eftersom gamla Edit har blivit glömsk på gamla dar, har man bestäm sig för att märka/snitsla vägarna med olika färger så att hon hittar hem. Det exakta kravet är att alla vägar som går från ett hus måste ha olika färger. Vad är det för optimeringsproblem? Hur många färger krävs?

(2p) i) Hyggebyeborna bestämmer sig för att dela upp husen i två grupper så att summan av avstånden av vägarna som går från den ena gruppen till den andra gruppen maximeras. (Varför är det ingen som riktigt vet.) Vad är det för optimeringsproblem? Använd en heuristik för att hitta en bra lösning.

(2p) j) Herr Jensen går varje dag från sitt hem (nod 1) till busshållplatsen vid nod 5. Han har ont i knät, och vill vara helt säker på att han går den kortaste vägen. Hur ska han gå? Ge ett helt säkert optimalitetsbevis (med hjälp av en känd metod).

(1p) k) Fru Jensen går också varje dag från sitt hem (nod 1) till busshållplatsen vid nod 5. Hon är sportigare och vill gå den längsta vägen. Vad är det för optimeringsproblem? Blir det lätt för fru Jensen att hitta optimal väg?

(3p) l) För problemet i uppgift b finns en problemformulering där man har bivillkor på nodvalens. Skriv upp alla dessa bivillkor (inte med summor, utan med explicita variabler) för den specifika grafen ovan. Använd dessa bivillkor tillsammans med grafens utseende för att reducera problemet, dvs. fixera så många variabler som möjligt. Relatera slutresultatet till resultatet i uppgift e.

Uppgift 4

Betrakta nedanstående heltalsproblem.

$$
\begin{array}{llrcrcl}
\min & z = & 2x_1 & + & x_2 & & \\
\text{då} & & 3x_1 & + & 2x_2 & \geq & 3 \\
 & & 3x_1 & + & 4x_2 & \leq & 7 \\
 & & x_1, & & x_2 & \geq & 0, \text{ heltal}
\end{array}
$$

(3p) a) Lös problemet med Land-Doig-Dakins metod. LP-problem får lösas grafiskt.

(1p) b) Studera problemet ovan grafiskt och ta fram det konvexa höljet av de tillåtna heltalspunkterna. Ange en minimal mängd bivillkor som tillsammans definierar det konvexa höljet.