Matematiska institutionen
Optimeringslära

TENTAMEN

TAOP33/TEN 2
KOMBINATORISK OPTIMERING GRUNDKURS för D och C

Datum:	26 augusti 2010
Tid:	8.00-13.00
Hjälpmedel:	Miniräknare
	Kurslitteratur: Kaj Holmberg: *Kombinatorisk optimering med linjärprogrammering.*
	Anteckningar i normal omfattning får förekomma i boken.
Antal uppgifter:	4
Antal sidor:	4
	Uppgifterna är *inte* ordnade efter svårighetsgrad.
	Totalt antal poäng är 40. För godkänt krävs normalt 16 poäng.
Examinator:	Kaj Holmberg
Jourhavande lärare:	Kaj Holmberg, tel 013-282867

Resultat meddelas per e-post

Tentamensinstruktioner

När Du löser uppgifterna

Redovisa dina beräkningar och din lösningsmetodik noga.
Motivera alla påståenden du gör.
Använd de standardmetoder som ingår i kursen.

Skriv endast på ena sidan av lösningsbladen. Använd inte rödpenna.
Behandla endast en huvuduppgift på varje blad.

Vid skrivningens slut

Sortera dina lösningsblad i uppgiftsordning.
Markera på omslaget vilka uppgifter du behandlat.
Kontrollräkna antalet inlämnade blad och fyll i antalet på omslaget.

Uppgift 1

Betrakta nedanstående LP-problem.

$$\begin{array}{llrcrcrcl}
\max & z = & 3x_1 & + & x_2 & + & x_3 & & \\
\text{då} & & x_1 & + & x_2 & + & x_3 & \leq & 2 \\
& & 2x_1 & + & x_2 & & & \leq & 1 \\
& & & & x_2 & + & x_3 & \leq & 1 \\
& & x_1, & & x_2, & & x_3 & \geq & 0
\end{array}$$

a) Lös problemet med simplexmetoden. Ange optimallösning, målfunktionsvärde samt vilka bivillkor som är aktiva i optimum. (4p)

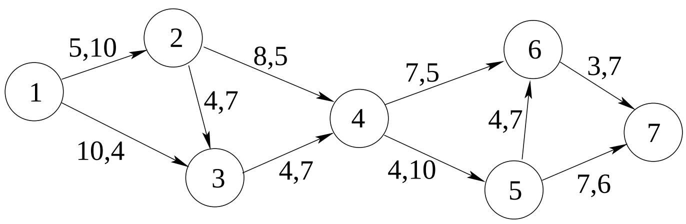
b) Ange tre olika extrempunkter till det tillåtna området ovan. (1p)

c) Skulle optimallösningen i uppgift a ändras om målfunktionskoefficienten till x_2 var lika med 2? (1p)

d) Formulera LP-dualen till problemet ovan. Finn optimal duallösning med hjälp av resultatet i uppgift a, och kontrollera komplementaritetsvillkoren. (3p)

Uppgift 2

Betrakta nedanstående nätverk, där bågarna har märkts med kostnad och kapacitet.



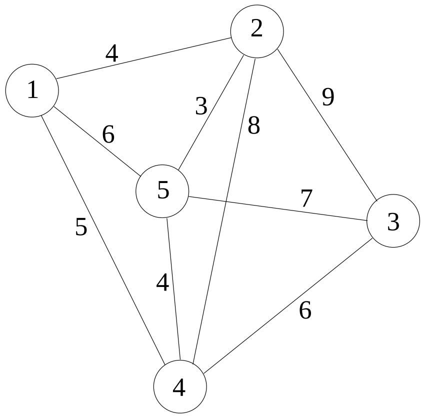
a) Man vill skicka så mycket som möjligt från nod 1 till nod 7. Börja med att skicka 7 enheter vägen 1 – 2 – 3 – 4 – 5 – 6 – 7, och 3 enheter vägen 1 – 2 – 4 – 5 – 7. Sök sedan maxflöde med en konvergent metod. (3p)

b) Antag att det finns flera olika sätt att skicka maxflödet. Finn det sätt som ger minimal kostnad, med hjälp av simplexteknik. Starta från lösningen i uppgift a och använd bl.a. båge (2,4) som basbåge. (4p)

c) Finn billigaste väg från nod 1 till nod 7 i ovanstående nätverk. Ange eller beskriv metoden. (2p)

Uppgift 3

Betrakta följande riktade graf, där bågarna märkts med kostnad.



a) Finn billigaste uppspännande träd i grafen. Ange kostnad. (2p)

b) Anta att man vill hitta en billigaste handelsresandetur i grafen ovan. Finn billigaste 1-träd i grafen, och gör passande förgrening för att med trädsökning finna optimal handelsresandetur. Lös de nybildade delproblemen i endast en nivå ner, enligt bredd-först-strategi. (Lös ej färdigt.) Vilka bästa övre och undre gränser för kostnaden för den optimala handelsresandeturen har man då erhållit? (4p)

c) Lös det kinesiska brevbärarproblemet i grafen ovan. Ange totalkostnad. (3p)

d) Betrakta Steinerträdsproblemet i grafen ovan, då noderna 1, 2 och 4 måste vara med. Finn en lösning med en känd heuristik. (2p)

e) Betrakta handelsresandeproblemet i uppgift b. En alternativ relaxation är tillordningsproblemet. Man får då följande kostnadsmatris (där M är ett mycket stort tal):

$$C = \begin{pmatrix} M & 4 & M & 5 & 6 \\ 4 & M & 9 & 8 & 3 \\ M & 9 & M & 6 & 7 \\ 5 & 8 & 6 & M & 4 \\ 6 & 3 & 7 & 4 & M \end{pmatrix}.$$

Lös detta tillordningsproblem med ungerska metoden. Ange totalkostnad. Tolka lösningen i grafen och föreslå ett sätt att förgrena. (Lös inga fler delproblem.) (5p)

Uppgift 4

Betrakta nedanstående heltalsproblem.

$$
\begin{array}{llrcrcl}
\max & z = & 6x_1 & + & 5x_2 & & \\
\text{då} & & 2x_1 & + & 3x_2 & \leq & 5 \\
 & & 4x_1 & + & 2x_2 & \leq & 5 \\
 & & x_1, & & x_2 & \geq & 0, \text{ heltal}
\end{array}
$$

a) Det påstås att lösningen $x_1 = 1$ och $x_2 = 0$ är optimal. Bevisa (eller motbevisa) detta med Land-Doig-Dakins metod. LP-problem får lösas grafiskt. Ange alla undre och övre gränser på det optimala målfunktionsvärdet som erhålls under algoritmens gång. (4p)

b) Hur kan man se att ingen variabel kan anta ett värde större än ett? Finn en minimal övertäckning och lägg till motsvarade bivillkor. Blir lösningsgången i uppgift a enklare? (2p)