Matematiska institutionen
Optimeringslära

TENTAMEN

TAOP33/TEN 2
KOMBINATORISK OPTIMERING GRUNDKURS för D och C

Datum:	14 januari 2011
Tid:	8.00-13.00
Hjälpmedel:	Miniräknare Kurslitteratur: Kaj Holmberg: *Kombinatorisk optimering med linjärprogrammering.* Anteckningar i normal omfattning får förekomma i boken.
Antal uppgifter:	6
Antal sidor:	5 Uppgifterna är *inte* ordnade efter svårighetsgrad. Totalt antal poäng är 40. För godkänt krävs normalt 16 poäng.
Examinator:	Kaj Holmberg
Jourhavande lärare:	Kaj Holmberg, tel 013-282867

Resultat meddelas per e-post

Tentamensinstruktioner

När Du löser uppgifterna

Redovisa dina beräkningar och din lösningsmetodik noga.
Motivera alla påståenden du gör.
Använd de standardmetoder som ingår i kursen.

Skriv endast på ena sidan av lösningsbladen. Använd inte rödpenna.
Behandla endast en huvuduppgift på varje blad.

Vid skrivningens slut

Sortera dina lösningsblad i uppgiftsordning.
Markera på omslaget vilka uppgifter du behandlat.
Kontrollräkna antalet inlämnade blad och fyll i antalet på omslaget.

Uppgift 1

Betrakta följande LP-problem

$$\begin{array}{rrrrrrrrr} \max & z = & 2x_1 & + & x_2 & - & x_3 & & \\ \text{då} & & 2x_1 & + & 3x_2 & + & x_3 & \leq & 5 \\ & & x_1 & + & 2x_2 & + & 3x_3 & \leq & 4 \\ & & x_1, & & x_2, & & x_3 & \geq & 0 \end{array}$$

a) Lös problemet med simplexmetoden. Ange optimallösning samt vilka bivillkor som är aktiva. (2p)

b) Formulera LP-dualen till problemet ovan. Lös dualen grafiskt. Visa att komplementaritetsvillkoren är uppfyllda. (3p)

c) Ange, för varje primal baslösning som passeras i uppgift 1a, den duala lösning som uppfyller komplementaritetsvillkoren. Rita in de duala punkterna i figuren i uppgift 1b.

Välj även en tillåten men ej optimal baslösning i dualen och beräkna den primala lösning som uppfyller komplementaritetsvillkoren. Är den tillåten? Optimal? (2p)

d) Antag att högerleden i primalen kan komma att ändras, men att inget annat ändras. Vilka primala variabler kan/kan inte vara med i basen i en optimallösning för något val av högerled? Ledning: Studera dualen grafiskt. (1p)

e) För vilka värden på c_3 är optimallösningen i uppgift 1a fortfarande optimal? (1p)

f) Lägg till kravet att de primala variablerna skall vara heltal och lös problemet med Land-Doig-Dakins trädsökningsmetod. Problem i två dimensioner får lösas grafiskt. (Ledning: Senaste förgreningen blir alltid aktiv.) (3p)

Uppgift 2

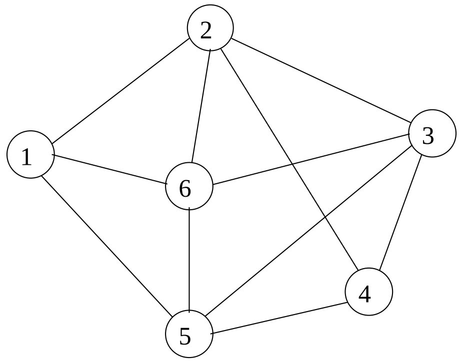
Vi har en oriktad graf $G = (N, B)$ med bågkostnaderna c. Vårt optimeringsproblem är att finna den billigaste sammanhängande graf där varje nod skall ha valens minst tre.

a) Formulera problemet matematiskt, i variabler och bivillkor. (2p)

b) Ange en undre gräns på antalet bågar kan ingå i en optimallösning. (1p)

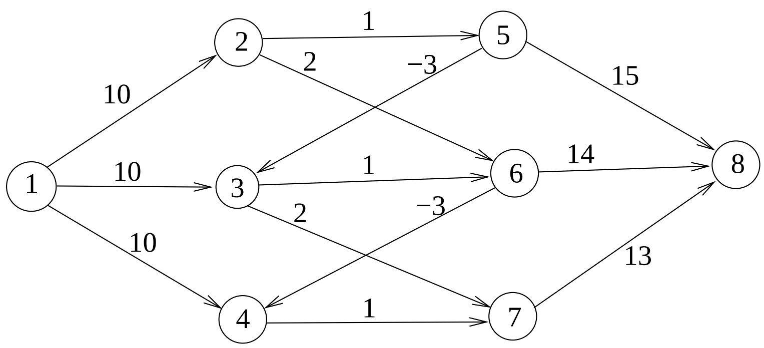
c) Hitta på och beskriv en heuristik för problemet.

Applicera heuristiken på följande graf, där alla bågkostnader är lika med 1. Avgör hur långt från optimum lösningen ligger med hjälp av svaret på uppgift 2b. (4p)



Uppgift 3

Betrakta problemet att finna billigaste väg från nod 1 till nod 8 i följande riktade graf med bågkostnader.



a) Använd Dijkstras metod för att finna en lösning. (2p)

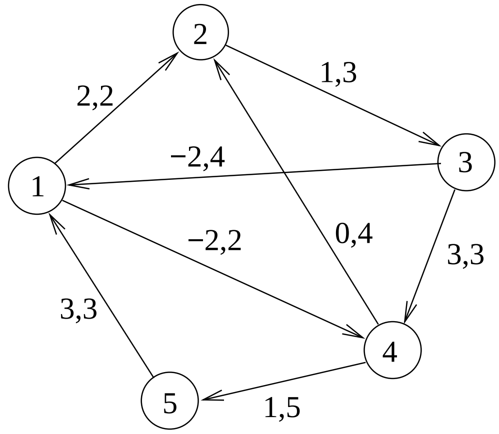
b) Kontrollera resultatet av uppgift a med Fords metod. Starta med de nodmärkningar som erhölls i uppgift a och verifiera optimalitet eller finn ny optimallösning. (2p)

c) Beskriv ytterligare en metod som ger korrekt billigaste väg i detta exempel. (1p)

d) Hur mycket får båge (5, 8) högst kosta om den ska vara med i en billigaste väg? (Använd optimala nodpriser.) (1p)

Uppgift 4

Betrakta problemet att finna billigaste cirkulerande flöde i följande riktade graf med bågkostnader och kapaciteter. (Undre gräns för flödet är noll i alla bågar.)



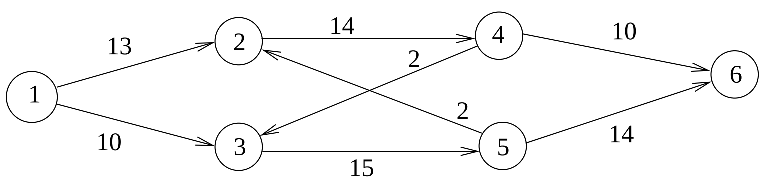
Studenten Lin Ko Ping skall lösa problemet med simplexmetoden för nätverk. Hon börjar med flödet noll i alla bågar, och startbasträdet (1, 2), (2, 3), (3, 4), (4, 5). I första iterationen blir båge (1, 4) inkommande, men flödesändringen blir noll, eftersom den erhållna cykeln använder vissa bågar bakåt. Efter flera iterationer med flödesändring noll, börjar Ping tro att nollflödet är optimalt. Hon har nu kommit fram till basträdet (2, 3), (3, 1), (1, 4), (4, 5), och flödet är fortfarande noll.

a) Hjälp Lin Ko och lös färdigt problemet. Är nollflödet optimalt? (3p)

b) Är den optimala baslösningen degenererad? (1p)

Uppgift 5

Betrakta problemet att finna maximalt flöde från nod 1 till nod 6 i nedanstående riktade nätverk med bågkapaciteter.

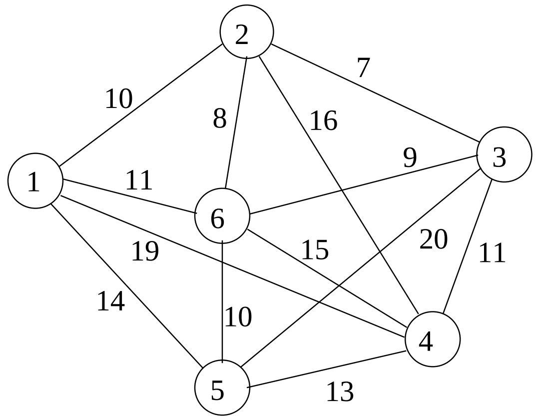


a) Skicka 10 enheter vägen 1 - 2 - 4 - 6, och 10 enheter vägen 1 - 3 - 5 - 6. Man kan beräkna kapaciteten över ett snitt genom att summera över alla bågar som startar i en nodmängd S och slutar utanför (i nodmängden $N \setminus S$). Gör detta för $S = \{1\}$, $S = \{1, 2, 3\}$ och för $S = \{1, 2, 3, 4, 5\}$. Vad vet man nu om maxflödet? (1p)

b) Finn minsnitt och maxflöde för ovanstående problem. (3p)

Uppgift 6

Betrakta nedanstående oriktade graf med bågkostnader.



a) Finn billigaste uppspännande träd i grafen. Ange totalkostnad. (1p)

b) Finn billigaste 1-träd i grafen. Ange totalkostnad. (1p)

c) Finne en tillåten handelsresandetur i grafen med en enkel heuristik. (Om så behövs kan bågar som inte finns med i ovanstående graf läggas till, med kostnad 100.) Ange övre och undre gränser för det optimala målfunktionsvärdet. (1p)

d) Vilka bågar skall man trafikera två gånger i en optimal kinesisk brevbärartur i ovanstående graf? (2p)

e) Konstruera en oriktad graf med bågkostnader med 6 noder (t.ex. genom att ändra i ovanstående graf) så att Kruskals metod måste undersöka minst 10 bågar. (1p)

f) I ett gatunät kan man mycket väl tänka sig att ingen nod har valens större än t.ex. 5 (dvs. att det inte finns någon korsning mellan fler än 5 gator), oavsett hur stor staden är. Vilken komplexitet har Prims metod för billigaste uppspännande träd om vi vet att ingen nod har valens större än 5? Motivera. (1p)