Tekniska Högskolan i Linköping
Matematiska Institutionen
Optimeringslära
Kaj Holmberg

Kombinatorisk optimering med miljö
Lösning till tentamen
2014-10-24

Lösningar

Uppgift 1

1a:
Inför slackvariabler x_3, x_4 och x_5. Starta med slackvariablerna i basen.

Bas	z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	$\hat{b}$
z	1	-7	-8	0	0	0	0
x_3	0	1	1	1	0	0	2
x_4	0	3	4	0	1	0	7
x_5	0	4	3	0	0	1	9

Först blir x_2 inkommande och x_4 utgående.

Bas	z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	$\hat{b}$
z	1	-1	0	0	2	0	14
x_3	0	1/4	0	1	-1/4	0	1/4
x_2	0	3/4	1	0	1/4	0	7/4
x_5	0	7/4	0	0	-3/4	1	15/4

Nu blir x_1 inkommande och x_3 utgående.

Bas	z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	$\hat{b}$
z	1	0	0	4	1	0	15
x_1	0	1	0	4	-1	0	1
x_2	0	0	1	-3	1	0	1
x_5	0	0	0	-7	1	1	2

Därefter fås optimum. $x_1 = 1$, $x_2 = 1$, ($x_3 = 0$, $x_4 = 0$, $x_5 = 2$) och $z = 18$. Svar: Tryck gamla tentor och kompendier i ett dygn vardera. Det ger vinsten 18000 kr. Det blir häftklamrar över, men pappret går åt.

1b: Skuggpriserna från uppgift a är $y_1 = 4$, $y_2 = 1$ och $y_3 = 0$. En liten ökning av högerledet i bivillkor 2 ge lika stor ökning av optimala målfunktionsvärdet.

1c: (LP-dualen är standard.) Duallösningen är $y_1 = 4$, $y_2 = 1$ och $y_3 = 0$, vilken är tillåten samt ger samma målfunktionsvärde som primalen.

1d: Ny variabel, x_6, får reducerad kostnad $\hat{c}_6 = c_6 - a_6^T y = 7 - y_1 - 4y_2 - 4y_3 = 7 - 4 - 4 = -1 < 0$. (Man måste ha samma sorter som när y beräknades.) Svar nej, det lönar sig inte att trycka nya tentor.

Uppgift 2

2a: Ja, problemet är konvext. Två kvadrater i målfunktionen, linjära bivillkor.

2b: Problemet skrivet i standardform är:

$$\begin{array}{rl} \min & f(x) = (x_1-3)^2 + 2(x_2-2)^2 \\ \text{då} & g_1(x) = x_1 + x_2 - 3 \le 0 \\ & g_2(x) = x_1 - 3 \le 0 \\ & g_3(x) = x_2 - 3 \le 0 \\ & g_4(x) = -x_1 \le 0 \\ & g_5(x) = -x_2 \le 0 \end{array}$$

Vi har $\nabla f(x) = \begin{pmatrix} 2(x_1-3) \\ 4(x_2-2) \end{pmatrix}$, $\nabla g_1(x) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\nabla g_2(x) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$,
$\nabla g_3(x) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$,
$\nabla g_4(x) = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\nabla g_5(x) = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$.

För mittpunkten ($x_1 = 1.5, x_2 = 1.5$):
KKT1: Punkten är tillåten.
KKT2: Bara bivillkor 1 är aktivt, så $u_2 = 0$, $u_3 = 0$, $u_4 = 0$ och $u_5 = 0$.
KKT3: $\begin{pmatrix} -3 \\ -2 \end{pmatrix} + u_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. Eftersom man inte kan ha både $u_1 = 3$ och $u_1 = 2$, saknar KKT3 tillåten lösning, så detta är inte en KKT-punkt.

2b: Nu har vi ingen given punkt. Antagandet om aktiva bivillkor ger (enligt KKT2) att $u_2 = 0$, $u_3 = 0$, $u_4 = 0$ och $u_5 = 0$.
KKT3 ger nu $\begin{pmatrix} 2(x_1-3) \\ 4(x_2-2) \end{pmatrix} + u_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. Vi kan lösa ut x som funktion av u: $x_1 = (6-u_1)/2$ och $x_2 = (8-u_1)/4$.

Antagandet om aktiva bivillkor ger även $x_1 + x_2 = 3$, vilket med ovanstående ger $x_1 + x_2 = (6-u_1)/2 + (8-u_1)/4 = 5 - 3u_1/4 = 3$. Lös ut $u_1 = 8/3 \ge 0$, så KKT4 är uppfyllt. Lös nu ut x mha. u: $x_1 = 5/3$, $x_2 = 4/3$.

KKT2, KKT3 och KKT4 är nu uppfyllda, men vi för inte glömma KKT1. Kontroll ger att alla bivilkor är uppfyllda, så punkten är tillåten. Eftersom punkten uppfyller alla KKT-villkor och problemet är konvext, så är punkten optimal.

Uppgift 3

3a: Den givna startlösningen är tillåten och ger basbågarna (1,2), (2,5), (3,5) och (3,6) samt någon båge som går till nod 4, t.ex. (1,4). Detta ger nodpriserna $y_1 = 0$, $y_2 = 7$, $y_3 = 7$, $y_4 = 7$, $y_5 = 13$, $y_6 = 13$, och följande reducerade kostnader: $\hat{c}_{13} = -3 < 0$ (optimalt), $\hat{c}_{23} = 6 > 0$ (optimalt), $\hat{c}_{43} = 6 > 0$ (optimalt), $\hat{c}_{46} = 0$ (optimalt), $\hat{c}_{56} = 6 > 0$ (optimalt). Lösningen är alltså optimal.

3b: Vi får nu reducerade kostnad $\hat{c}_{46} = -1 < 0$ (ej optimalt, öka), vilket ger x_{46} som inkommande variabel (att öka). Cykeln blir 4-6-3-5-2-1-4, ändringen blir 2 enheter, och utgående variabel blir x_{12} (eller x_{25}).

Nu fås nodpriserna $y_1 = 0$, $y_2 = 6$, $y_3 = 7$, $y_4 = 7$, $y_5 = 12$, $y_6 = 12$, och följande reducerade kostnader: $\hat{c}_{12} = 1 > 0$ (optimalt), $\hat{c}_{13} = -2 < 0$ (optimalt), $\hat{c}_{23} = 6 > 0$ (optimalt), $\hat{c}_{43} = 7 > 0$ (optimalt), $\hat{c}_{56} = 6 > 0$ (optimalt). Nu är lösningen optimal.

3c: Lösningen till uppgift b gav nodpriser $y_1 = 0$ och $y_3 = 6$, så reducerade kostnad för båge (1,3) blir $\hat{c}_{13} = c_{13} - 6$, vilket blir större än noll om $c_{13} > 6$. Om kostnaden blir högre än 6 kommer Fusk&Fix att ändra sin transportplan.

Uppgift 4

4a: Kör Fords metod (ty negativa kostnader och cykler), vilket ger vägen 1-2-5-6, med kostnad 9.

4b: Kör Fords metod (ty positiva kostnader och cykler). Ganska snabbt upptäcker man en positiv cykel (t.ex. 1-2-3-1, som gör att man kan öka y_2, y_3 och y_1 godtyckligt mycket). Det finns alltså ingen dyraste väg från 1 till 6.

4c: Nodpriserna är $y_2 = 7$ och $y_3 = 9$, så $\hat{c}_{23} = c_{23} + 7 - 9 = c_{23} - 2 \leq 0$ om $c_{23} \leq 2$. Detta innebär att y_3 sänks till $c_{23} + 7$.

Dock ingår inte nod 3 i billigaste vägen om inte y_5 eller y_9 bestäms via nod 3. För y_9 krävs $y_3 + 4 \leq 9$, dvs. $y_3 \leq 5$. För det krävs $c_{23} + 7 \leq 5$, dvs. $c_{23} \leq -2$. För y_5 krävs $y_3 + 5 \leq 12$, dvs. $y_3 \leq 7$. För det krävs $c_{23} + 7 \leq 7$, dvs. $c_{23} \leq 0$. Det räcker med ett av dessa, så $c_{23} \leq 0$ är tillräckligt.

Uppgift 5

5a: Sök flödesökande väg. Man når noderna 1, 2, 3, 4 och 5, men inte nod 6, så flödet är maximalt och minsnittet går runt nod 6.

5b: En maximal flödesökande väg (funnen med Dijkstras metod) blir 1-2-3-4-6, med kapaciteten 1. Skicka en enhet, och ändra tillåtna riktningar.

När vi nästa gång söker flödesökande väg, når vi bara nod 1, 2, 3 och 5, så minsnittet går mellan dessa noder och noderna 4 och 6. (Det finns även ett minsnitt runt nod 6.)

Uppgift 6

P0: Grafisk lösning ger $x_1 = 4/3$, $x_2 = 5/6$ och $z = 70.33$, vilket ger $\bar{z} = 70$.

Förgrena över x_2: P1 = P0 + ($x_2 \leq 0$), P2 = P0 + ($x_2 \geq 1$).
Jag väljer att gå ner i $\leq$-grenen först.
P1: Grafisk lösning: $x_1 = 2$, $x_2 = 0$, $z = 68$, vilket ger $\bar{z} = 68$. Heltalig lösning, spara, kapa och notera $\underline{z} = 68$.

P1: Grafisk lösning ger $x_1 = 1$, $x_2 = 1$, $z = 64$, vilket ger $\bar{z} = 64$. Kapa, ty för dåligt.

Trädet avsökt. Bästa lösning $x_1 = 2$, $x_2 = 0$, med $z = 68$.
Svar i ord: Köp två maskiner av sort 1.

Uppgift 7

7a: Om man startar närmaste-granne heuristiken i nod 2 fås en tillåten lösning, med kostnaden 45.

7b: Billigaste 1-träd kostar 44, så vi har en övre gräns på 45 och en undre på 44. Så lösningen ligger som mest en enhet från optimum.

7c: Kruskals eller Prims metod ger ett billigaste uppspännande träd som kostar 35.

7d: Nod 2 och 3 har udda valens, och det billigaste sättet att höja dessa är att dubblera båge (2,3). Finn sedan en Eulertur, vilken kostar 71.

Uppgift 8

Efter första steget fås $\alpha = (2, 5, 3, 2, 1)$ och $\beta = (0, 1, 2, 0, 0)$. Man kan stryka alla nollor genom att stryka rad 1, 2 och 3 samt kolumn 1, med minsta ostrukna element 2, vilket gör att vi får $\alpha = (2, 5, 3, 4, 3)$ och $\beta = (-2, 1, 2, 0, 0)$. Nu kan man stryka alla nollor genom att stryka rad 1 och 2 samt kolumn 1 och 2, med minsta ostrukna element 2, vilket gör att vi får $\alpha = (2, 5, 5, 6, 5)$ och $\beta = (-4, -1, 2, 0, 0)$.

Nu fås lösningen $x_{15} = 1$, $x_{24} = 1$, $x_{32} = 1$, $x_{43} = 1$, $x_{51} = 1$, dvs. bil 1 åker till plats 5, bil 2 till plats 4, bil 3 till plats 2, bil 4 till plats 3 och bil 5 till plats 1. Total kostnad (tid) blir 20.