Tekniska Högskolan i Linköping
Matematiska Institutionen
Optimeringslära
Kaj Holmberg

TAOP86
Lösning till tentamen
2022-01-04

Lösningar

Uppgift 1

1a: Modell:
Bivillkor:

$$
\begin{array}{ll}
x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7 + x_8 + x_9 \leq 8x_1 & (1) \\
x_1 \leq x_4 & (2) \\
x_1 \leq x_5 + x_6 & (3) \\
x_2 + x_8 \geq x_1 & (4) \\
x_8 \leq x_9 & (5) \\
x_7 \geq x_2 & (6) \\
x_7 \geq x_8 & (7) \\
x_7 \leq x_2 + x_8 & (8) \\
x_7 \leq 1 - x_6 & (9) \\
x_3 \leq 1 - x_6 & (10) \\
x_2 \leq 1 - x_6 & (11) \\
x_2 + x_9 \leq 1 & (12) \\
x_j \in 0, 1 \forall j &
\end{array}
$$

Målfunktion: min $c^T x = -10x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 2x_4 + x_5 + x_6 + 3x_7 + x_9$

1b: Inga fixeringar får första rundan. Förgrena över x_1.
P1: $x_1 = 0$: (1): Alla andra variabler fixeras till noll. Tillåten lösning, med $z = 0$. Kräv bättre lösning: $c^T x \leq -1$ (0).
P2: $x_1 = 1$: (2): $x_4 = 1$.
Förgrena över x_2:
P3: $x_1 = 1$, $x_2 = 0$: (4): $x_8 = 1$, (5): $x_9 = 1$, (7): $x_7 = 1$, (9): $x_6 = 0$, (3): $x_5 = 1$.
Förgrena över x_3:
P5: $x_1 = 1$, $x_2 = 0$, $x_3 = 0$: Lösningen fixerad, tillåten, $z = -3$. Kräv bättre lösning: $c^T x \leq -4$ (0).
P6: $x_1 = 1$, $x_2 = 0$, $x_3 = 1$: Lösningen fixerad, ej tillåten pga (0). Kapa.
P4: $x_1 = 1$, $x_2 = 1$: (6): $x_7 = 1$, (9): $x_6 = 0$, (12): $x_9 = 0$, (5): $x_8 = 0$, (3): $x_5 = 1$, (0): kapa grenen, målfunktionsvärdet för dåligt.

Trädet avsökt, bästa lösningen funnen i P5: $x_1 = 1$, $x_2 = 0$, $x_3 = 0$, $x_4 = 1$, $x_5 = 1$, $x_6 = 0$, $x_7 = 1$, $x_8 = 1$, $x_9 = 1$, $z = -3$. I ord: Genomför julmarknaden, genomför inte Tomteruset, kör inte Tomtetåget, ställ upp staket runt torget, kräv att alla gäster visar intyg, inför inte en begräsning på 20 besökare, anlita artisten som konferencier, låt den lokala dansklassen ska uppträda och inrätta en scen på torget. Detta ger en vinst på 3.

Uppgift 2

Handelsresandeproblem. Undre gräns hittas med billigaste 1-träd, kostnad 35.

För att få en tillåten lösning kan man använda närmaste granne-heuristiken, med lite modifiering. Först får man 1-4-7-8-5. Sedan borde man gå till 2, men då kan man inte få en rundtur. Om man inte tillåts att gå till 2, får man istället 5-6-9-3-2-1. Turen blir alltså 1-4-7-8-5-6-9-3-2-1, med kostnaden 42. Vi får alltså övre gräns 42 och undre gräns 35, så lösningen ligger högst 7 från optimum. (Det finns också en lösning, 1-4-5-2-3-6-9-8-7-1, med kostnad 39.)

Uppgift 3

Billigaste väg, lös med Dijkstras metod. Billigaste väg från nod 1 till 9 blir 1-2-6-5-7-9, med kostnaden 37. Billigaste väg från nod 9 till 1 blir 9-8-4-5-3-1, med kostnaden 46.

Uppgift 4

4a: När någon av sidorna är noll, blir ju ytan till julmarknaden noll, så dår blir det ingen julmarknad. Därför undersöks bara de punkter med båda koordinaterna större än noll, (1,4) och (3,2).

Skriv problemet på standardform för att applicera KKT-villkoren.
$g_1(x) = x_1 - 3 \leq 0$, $g_2(x) = -x_1 \leq 0$, $g_3(x) = x_2 - 4 \leq 0$, $g_4(x) = -x_2 \leq 0$, $g_5(x) = 2x_1 + 2x_2 - 10 \leq 0$, $\nabla f(x) = \begin{pmatrix} 4x_1 - 12 \\ 2x_2 - 8 \end{pmatrix}$, $\nabla g_1(x) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\nabla g_2(x) = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\nabla g_3(x) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\nabla g_4(x) = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$, $\nabla g_5(x) = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$.

För punkt (1, 4):
KKT1: Punkten är tillåten.
KKT2: Bivillkor 1, 2 och 4 är inte aktiva, så $u_1 = u_2 = u_4 = 0$.
KKT3: $\begin{pmatrix} -8 \\ 0 \end{pmatrix} + u_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + u_5 \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.
Detta ger $u_3 = -8$ och $u_5 = 4$, så KKT4 är inte uppfyllt. Punkten är inte en KKT-punkt.

För punkt (3, 2):
KKT1: Punkten är tillåten.
KKT2: Bivillkor 2, 3 och 4 är inte aktiva, så $u_2 = u_3 = u_4 = 0$.
KKT3: $\begin{pmatrix} 0 \\ -4 \end{pmatrix} + u_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + u_5 \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.
Detta ger $u_1 = -4$ och $u_5 = 2$, så KKT4 är inte uppfyllt. Punkten är inte en KKT-punkt.

Ingen av punkterna är KKT-punkt, och ingen därmed optimal. (Eftersom u_5 är större än noll i båda dessa punkter, skulle man kunan gissa på att bivillkor 5 ska vara aktivt.)

4b: I startpunkten är bara ickenegativitetsvillkoren aktiva. Första LP-problemet blir

min $z = -12d_1 - 8d_2$ då $0 \leq d \leq 1$,

vilket har optimallösning $d = (1, 1)$ med $z = -20$. Sätt $x^{(2)} = (t, t)$. Maximal steglängd blir $5/2 = 2.5$. Linjesökning ger $t = 10/3 \approx 3.33$, så vi får $t = 5/2$, och $x^{(2)} = (5/2, 5/2)$.

Nu är bivillkor 5 aktivt. LP-problemet blir

min $z = -2d_1 - 3d_2$ då $d_1 + d_2 \leq 0$, samt $-1 \leq d \leq 1$,

vilket har optimallösning $d = (-1, 1)$ med $z = -1$. Sätt $x^{(3)} = (5/2 - t, 5/2 + t)$. Maximal steglängd blir $3/2 = 1.5$. Linjesökning ger $t = 1/6$, så vi får $t = 1/6 \approx 0.167$, och $x^{(2)} = (7/3, 8/3)$.

Nu är bivillkor 5 aktivt. LP-problemet blir

$$\min z = -8/3\ d_1 - 8/3\ d_2 \text{ då } d_1 + d_2 \le 0, \text{ samt } -1 \le d \le 1,$$

vilket har (ickeunik) optimallösning $d = (0, 0)$ med $z = 0$. Alltså är $x = (7/3, 8/3) \approx (2.33, 2.67)$ optimal.

4c: Lagrangerelaxationen:
$\varphi(u) = \min_{0 \le x_1 \le 3, 0 \le x_2 \le 4} 2x_1^2 + x_2^2 - 12x_1 - 8x_2 + 34 + u(2x_1 + 2x_2 - 10) = 2x_1^2 + x_2^2 + (2u - 12)x_1 + (2u - 8)x_2 - 10u + 34$

För $u = 0$ får vi $x_1 = 3$ och $x_2 = 4$, med $\varphi(2) = 0$. Undre gräns: 0. Punkten är inte tillåten, och ger ingen övre gräns,

För $u = 1$ får vi $x_1 = 5/2$ och $x_2 = 3$, med $\varphi(1) = 2.5$. Undre gräns: 2.5. Punkten är inte tillåten, och ger ingen övre gräns,

För $u = 2$ får vi $x_1 = 2$ och $x_2 = 2$, med $\varphi(2) = 2$. Undre gräns förbättras inte. Punkten är tillåten, och har målfunktionsvärde 4, vilket ger övre gräns 4.

Det optimala värdet på u ligger mellan 1 och 2. Övre gräns är 4 och undre gräns är 2.5.

4d: Bivillkoret ger ett icke-konvext tillåtet område. Det gör att ett lokalt men inte globalt optimum kan vara en KKT-punkt. Zoutendijks metod kan fastna i en icke-optimal punkt. Lagrangerelaxation kräver dock inte konvexitet, så där kan man lita på slutsatserna (under förutsättning att suproblemet löses korrekt).

Uppgift 5

P0: LP-optimum: $x_1 = 2.5$, $x_2 = 4$, $z = 22$. Detta ger $\bar{z} = 22$. Vi förgrenar över x_1.

P1 = P0 $+(x_1 \le 2)$.
P2 = P0 $+(x_1 \ge 3)$.

P1: LP-optimum: $x_1 = 2$, $x_2 = 4$, $z = 20$. En tillåten heltalslösning, så vi får $\underline{z} = 20$. Spara lösningen och kapa grenen.

P2: LP-optimum: $x_1 = 3$, $x_2 = 3$, $z = 21$. En tillåten heltalslösning, så vi får $\underline{z} = 21$. Spara lösningen och kapa grenen.

Trädet avsökt. Optimallösning: $x_1 = 3$, $x_2 = 3$, $z = 21$. I ord: använd 3 små stånd och 3 större stånd.

Uppgift 6

Efter första steget fås $\alpha = (10, 10, 10, 9, 12)$ och $\beta = (0, 2, 0, 2, 0)$. Man kan stryka alla nollor genom att stryka rad 1, 2 och 3, samt kolumn 1, med minsta ostrukna element 3, vilket gör att vi får $\alpha = (10, 10, 10, 12, 15)$ och $\beta = (-3, 2, 0, 2, 0)$. Man kan nu inte stryka alla nollor med färre än 5 streck. Man får lösningen $x_{12} = 1$, $x_{24} = 1$, $x_{33} = 1$, $x_{41} = 1$, $x_{55} = 1$, och total kostnad blir 58. Optimal duallösning är $\alpha = (10, 10, 10, 12, 15)$ och $\beta = (-3, 2, 0, 2, 0)$. Summering av duallösningen ger 58, så starka dualsatsen är uppfylld.

Uppgift 7

7a: Inför slackvariabler x_4, x_5, x_6 och x_7. Starta med slackvariablerna i basen.

Bas	z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	$\hat{b}$
z	1	-4	-5	-2	0	0	0	0	0
x_4	0	5	4	2	1	0	0	0	100
x_5	0	2	3	2	0	1	0	0	20
x_6	0	2	2	2	0	0	1	0	22
x_7	0	2	3	3	0	0	0	1	23

Först fås x_2 som inkommande variabel och x_5 som utgående.

Bas	z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	$\hat{b}$
z	1	-2/3	0	4/3	0	5/3	0	0	100/3
x_4	0	7/3	0	-2/3	1	-4/3	0	0	220/3
x_2	0	2/3	1	2/3	0	1/3	0	0	20/3
x_6	0	2/3	0	2/3	0	-2/3	1	0	26/3
x_7	0	0	0	1	0	-1	0	1	3

Nu fås x_1 som inkommande variabel och x_5 som utgående.

Bas	z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	$\hat{b}$
z	1	0	1	2	0	2	0	0	40
x_4	0	0	-7/2	-3	1	-5/2	0	0	50
x_1	0	1	3/2	1	0	1/2	0	0	10
x_6	0	0	-1	0	0	-1	1	0	2
x_7	0	0	0	1	0	-1	0	1	3

Nu är tablån optimal. Optimallösningen blir $x_1 = 10$, $x_2 = 0$, $x_3 = 0$, (samt $x_4 = 50$, $x_5 = 0$, $x_6 = 2$ och $x_7 = 3$) med $z = 40$. Optimallösningen är unik, eftersom ingen icke-basvariabel har reducerad kostnad noll. Bivillkor 2 är aktivt, eftersom slackvariabeln är noll. Duallösningen läses av i målfunktionsraden under slackvariablerna: $y_1 = 0$, $y_2 = 2$, $y_3 = 0$, $y_4 = 0$, $v = 40$.

Svar i ord: Bellatrix bör baka 10 pepparkakor, men inga saffranskatter eller kolakakor. Bivilkoren för mjöl blir aktivt och begränsande. De andra bivillkoren blir inte aktiva.

7b: Ny variabel x_8. Reducerad kostnad: $\hat{c}_8 = c_8 - a_8^T y = c_8 - 6y_1 = c_8 - 2 \geq 0$ om $c_8 \geq 2$. Vinsten skulle alltså behöva vara större än 2 för att marsipangrisar vore lönsamma.

Uppgift 8

Det är ett kinesiskt brevbärarproblem. Noderna 1, 4, 6 och 9 har udda valens (utan bågarna (2,3) och (7,8), och det billigaste sättet att få jämn vales är att dubblera bågarna (1,4) och (6,9). Kostnaden för turen blir $53 + 8 = 61$. En optimal tur är 1-2-5-6-3-7-6-7-8-5-4-7-1-4-1.

Uppgift 9

9a: Startlösningen är tillåten och ger att basbågarna är (1,7), (7,4), (2,4), (2,5), (3,5) och (4,6). Detta ger nodpriserna $y_1 = 0$, $y_2 = 5$, $y_3 = 5$, $y_4 = 10$, $y_5 = 9$, $y_6 = 16$, $y_7 = 6$, och följande reducerade kostnader: $\hat{c}_{14} = -5 < 0$ (optimalt ty $x = u$), $\hat{c}_{23} = 6 > 0$ (optimalt ty $x = 0$), $\hat{c}_{27} = 3 > 0$ (optimalt ty $x = 0$), $\hat{c}_{36} = -6 < 0$ (optimalt ty $x = u$) enligt Bertil, men $\hat{c}_{36} = 4 > 0$ (ej optimalt ty $x = u$) enligt Jesper, $\hat{c}_{65} = 14 > 0$ (optimalt ty $x = 0$). Detta är optimalt enligt Bertil, men Jesper får x_{36} som inkommande variabel, att minska. Cykeln blir 6-3-5-2-4-6, och maximal ändring blir 4, pga. båge (3,5), så vi väljer (3,5) som utgående. Det nodpriser som ändras är $y_3 = 1$, och de förändrade reducerade kostnaderna blir $\hat{c}_{23} = 10 > 0$ (optimalt ty $x = 0$), $\hat{c}_{35} = -2 < 0$ (optimalt ty $x = u$). Alla optimalitetsvillkor är uppfyllda, så lösningen är optimal.

9b: Finn maxflöde från nod 2 till nod 6. Starta med flöde noll. Lösningsgång: Sök maximal flödesökande väg med Dijkstras metod. Vi får vägen 2-4-6, med kapacitet 14. Skicka 14 enheter och ändra tillåtna riktningar. (Båge (4,6) blir full.) Sök åter maximal flödesökande väg med Dijkstras metod. Vi får nu vägen 2-3-6, med kapacitet 10. Skicka 10 enheter och ändra tillåtna riktningar. (Bågarna (3,6) blir full.) Sök åter maximal flödesökande väg med Dijkstras metod. Vi når inte nod 6, men kan märka noderna 2, 3, 4, 5 och 7, så minsnittet går över bågarna (3,6)och (4,6) (samt (6,5) bakåt). (Man kan heller inte nå nod 1, så (1,4) och (1,7) kan sägas ingå i minsnittet.) Maxflödet är 24.