

TAOP86/TEN 1  
KOMBINATORISK OPTIMERING MED  
MILJÖTILLÄMPNINGAR för IT

- Datum:** 10 juni 2011  
**Tid:** 14.00-19.00  
**Hjälpmedel:** Miniräknare  
Kaj Holmberg: *Optimering.*  
Kaj Holmberg: *Kombinatorisk optimering med linjärprogrammering.*  
Anteckningar i normal omfattning får förekomma i boken.
- Antal uppgifter:** 4  
**Antal sidor:** 4  
Uppgifterna är *inte* ordnade efter svårighetsgrad.  
Totalt antal poäng är 40. För godkänt krävs normalt 16 poäng.
- Examinator:** Kaj Holmberg  
**Jourhavande:** Kaj Holmberg, tel 013-282867
- Resultat meddelas per e-post**

## Tentamensinstruktioner

### När Du löser uppgifterna

*Redovisa dina beräkningar och din lösningsmetodik noga.  
Motivera alla påståenden du gör.  
Använd de standardmetoder som ingår i kursen.*

*Skriv endast på ena sidan av lösningsbladen. Använd inte rödpenna.  
Behandla endast en huvuduppgift på varje blad.*

### Vid skrivningens slut

*Sortera dina lösningsblad i uppgiftsordning.  
Markera på omslaget vilka uppgifter du behandlat.  
Kontrollräkna antalet inlämnade blad och fyll i antalet på omslaget.*

## Uppgift 1

Firma Prodotto Grande producerar två olika typer av vindkraftverk. Produktionen fredagen den 10:e juni kan bestå av högst två av varje sort, men tillgången till rotorblad begränsar produktionen till högst tre vindkraftverk totalt. Ett kraftverk av sort 1 ger vinsten 2, medan ett av sort 2 ger vinsten 3 (man avslöjar inte absoluta belopp, bara relativa).

a) Formulera problemet som ett LP-problem. Rita upp det tillåtna området och fundera på hur stor risken är att LP-modellen ger en icke-heltalig optimallösning. (3p)

b) Lös problemet med simplexmetoden. Ange optimallösning samt vilka bivillkor som är aktiva. (3p)

c) Ange och tolka bivillkorens skuggpriser. Hur mycket ökar vinsten om man får tillgång till så många rotorblad att ett vindkraftverk till kan produceras? (2p)

d) Antag att högerleden i bivillkoren kan anta andra värden. Finns det någon tillåten ej degenererad baslösning där alla tre bivillkoren är aktiva? (Göm inte att motivera.) (3p)

e) Formulera LP-dualen till problemet i uppgift a. Ange optimal duallösning med hjälp av optimaltablån i uppgift b. Visa att komplementaritetvillkoren är uppfyllda. (3p)

f) Är det möjligt att för modellen i uppgift a med heltalskrav på variablerna ta fram ett Gomory-snitt med hjälp av optimaltablån i uppgift b? Vid svar ja, gör det. Vid svar nej, motivera. (1p)

## Uppgift 2

Firma Plastico AB producerar plast. Man experimenterar med att tillsätta två olika mjukgörare till sin plast, och formulerar följande problem, där  $x_j$  anger hur många mg av ämne  $j$  som tillsätts. I målfunktionen anger  $f(x)$  risken för defekter i slutprodukten. Det första bivillkoret anger en lagstadgad gräns för miljöpåverkan, medan det andra bivillkoret anger begränsad tillgång av ämne 2.

$$\begin{aligned} \min f(x) &= x_1^2 + 2x_2^2 - 4x_1 - 2x_2 - x_1x_2 \\ \text{då } x_1 + x_2 &\leq 2 \\ x_2 &\leq 1 \\ x_1 &\geq 0 \\ x_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

a) Rita upp det tillåtna området och identifiera varje extrempunkt. För varje extrempunkt (utom origo), avgör grafiskt, genom att rita in gradienter för målfunktion och aktiva bivillkor, om punkten är optimal. (3p)

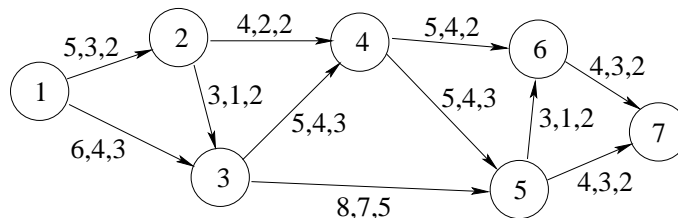
b) Sätt upp KKT-villkoren för problemet och kontrollera huruvida extrempunkterna i uppgift a är optimala lite mer formellt (dvs. räkna ut och kontrollera KKT-multiplikatorerna). (3p)

c) Man tror att optimum ligger i en punkt där enbart det första bivillkoret ( $x_1 + x_2 \leq 2$ ) är aktivt. Kontrollera om detta stämmer med hjälp av KKT-villkoren. (3p)

### Uppgift 3

Nedanstående nätverk representerar ett vägnät från Lilleby i nod 1 till Storeholm i nod 7. Vi ska åka från Lilleby till Storeholm med vår laddhybrid. Den har två framdrivningssätt, ren bensindrift eller ren eldrift. Man kan bara byta framdrivningssätt i noder i nätverket.

Varje båge är märkt med tre koefficienter. Den första anger vad det kostar att köra sträckan med ren bensindrift. Den andra anger vad det kostar att köra sträckan med ren eldrift. Den tredje anger hur mycket batterinivån sjunker om man åker sträckan med eldrift.



a) Antag att batteriet är så stort att det inte tar slut under denna resa. Hur och vilken väg ska man köra för att minimera kostnaden? (2p)

b) Antag att batteriet har en laddning av 5 vid resans start. Föreslå och använd en heuristik för att finna en bra och tillåten väg. (3p)

c) Betrakta problemet i uppgift b. Beskriv en exakt lösningsmetod baserad på dynamisk programmering. (3p)

### Uppgift 4

Norska företaget SeaOil AS har 5 oljeborrplattformar placerade i följande punkter i ett koordinatsystem: A: (0,0), B: (3,0), C: (5,5), D: (0,2), E: (2,3). Man ska med hjälp av en helikopter besöka varje oljeborrplattform, och kör fågelvägen mellan dem, så kostnaden är proportionell mot avståndet mellan punkterna. Helikoptern startar i A, ska besöka varje plats en gång, och sedan återvända till A.

a) Finn en tillåten lösning med närmaste-granneheuristiken. (Man behöver inte räkna ut exakta avstånd. Det räcker att använda ögonmått.) (2p)

- b)** Finn billigaste uppspännande träd i grafen. (2p)
- c)** Finn billigaste 1-träd i grafen (där A är nod 1). Försök finna en bättre rundtur än den i uppgift a genom att flytta enstaka bågar. (3p)
- d)** Föreslå en förgrening baserad på 1-trädet i uppgift c för exakt lösning av problemet. (Gör bara förgreningen. Lös inte färdigt problemet.) (1p)