Matematiska institutionen
Optimeringslära

TENTAMEN

TAOP86/TEN 1
KOMBINATORISK OPTIMERING MED MILJÖTILLÄMPNINGAR

Datum:	27 oktober 2020
Tid:	14.00-19.00
Hjälpmedel:	Miniräknare
	Kurslitteratur: Kaj Holmberg: *Optimering*
	Anteckningar i boken får förekomma.
Antal uppgifter:	8
Antal sidor:	8
	Uppgifterna är *inte* ordnade efter svårighetsgrad.
	Totalt antal poäng är 40. För godkänt krävs 16 poäng.
Examinator:	Kaj Holmberg
Jourhavande lärare:	Kaj Holmberg, tel 013-282867

Resultat meddelas per e-post

Tentamensinstruktioner

När Du löser uppgifterna

Redovisa dina beräkningar och din lösningsmetodik noga.
Motivera alla påståenden du gör.
Använd de standardmetoder som ingår i kursen.

Skriv endast på ena sidan av lösningsbladen. Använd inte rödpenna.
Behandla endast en huvuduppgift på varje blad.

Vid skrivningens slut

Sortera dina lösningsblad i uppgiftsordning.
Markera på omslaget vilka uppgifter du behandlat.
Kontrollräkna antalet inlämnade blad och fyll i antalet på omslaget.

Uppgift 1

Företaget NoViR AB tillverkar andningsskydd. Man har sedan tidigare en trogen kundkrets, med små men stadiga beställningar till underleverantörer i Sverige, Tyskland, England och Kina. Plötsligt avslutades alla beställningar till Kina utan att NoViR visste varför. Några månader senare ökade beställningarna till Sverige, Tyskland och England drastiskt, och NoViR stod inför en helt ny planeringssituation.

Efterfrågan i de tre länderna är d_i (i enhet 1000 andningsskydd) där $i = 1$ betyder Sverige, $i = 2$ betyder Tyskland och $i = 3$ betyder England. NoViR kommer inte att kunna tillgodose all efterfrågan p.g.a. begränsad tillgång på olika råvaror, vilket modelleras av vissa bivillkor i nedanstående modell. Man har olika avtal med de olika länderna, vilket ger olika vinster. Låt c_i vara vinsten av 1000 andningsskydd sålda till land i. Man får följande LP-modell med $d = (8, 12, 10)$ och $c = (5, 6, 4)$.

$$
\begin{array}{llrcrcrcrr}
\max & z = & 5x_1 & + & 6x_2 & + & 4x_3 & & & \\
\text{då} & & x_1 & + & x_2 & + & x_3 & \leq & 15 & (1) \\
& & x_1 & + & x_2 & & & \leq & 12 & (2) \\
& & x_1 & & & & & \leq & 8 & (3) \\
& & & & x_2 & & & \leq & 12 & (4) \\
& & & & & & x_3 & \leq & 10 & (5) \\
& & x_1, & & x_2, & & x_3 & \geq & 0 &
\end{array}
$$

Det första bivillkoret gäller delar som finns i alla andningsskydd, och det andra gäller delar man måste ta med i de andningsskydd som levereras till länder utanför Sverige. (Länderna har olika godkännandekrav.)

a) Lös detta LP-problem med simplexmetoden. Ange optimal primallösning och duallösning samt målfunktionsvärde. Vilka bivillkor blir aktiva, och vad betyder det? (3p)

b) Utgå från optimallösningen i uppgift a. Om NoViR kunde öka tillgången så att högerledet i antingen första eller andra bivillkoret ökas lite, vilket skulle man tjäna mest på? Motivera. (1p)

c) Utgå från optimallösningen i uppgift a. NoViR får en beställning från Frankrike på 30 000 andningsskydd. Koefficienterna i de första två bivillkoren är 1 och 2 (beroende på speciella franska krav). Vad skulle vinsten behöva vara för leverans till Frankrike för att lösningen skulle förbättras genom att skicka dit? (1p)

Uppgift 2

Man ska inrätta en temporär provtagningsstation för testning av antikroppar mot en pågående pandemi. Den ska ligga strax utanför ortens sjukhus, men den exakta positionen är inte given, utan ska bestämmas m.h.a. optimering. Låt (x, y) vara koordinaterna där provtagningsstationen ska placeras. Geografiska begränsningar baserade på områdets utseende ger att platsen måste uppfylla bivillkoren $x \in X$, där $X = \{(x, y) : x + 2y \leq 8,\ 1 \leq x \leq 4,\ 0 \leq y \leq 3\}$. Man vill har närhet till följande platser: akutintagningen, placerad i punkten (0, 0), huvudingången, placerad i punkten (4, 4), bilparkeringen, placerad i punkten (3, 5), samt den nyinrättade isoleringsavdelningen, placerad i punkten (8, 3), och bestämmer sig för att minimera summan av avstånden från varje plats till provtagningsstationen. Man använder Euklidiskt avstånd (2-norm), och gör en matematisk optimeringsmodell för problemet. Avståndet kan lika gärna mätas med kvadraten av det Euklidiska avståndet, så man får följande målfunktion. $\min f(x) = x^2 + y^2 + (x-4)^2 + (y-4)^2 + (x-3)^2 + (y-5)^2 + (x-8)^2 + (y-3)^2 = 4x^2 + 4y^2 - 30x - 24y + 139$

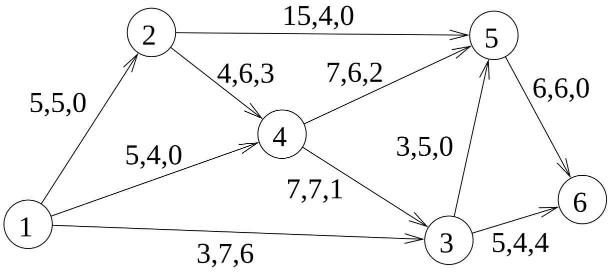
a) Rita upp det tillåtna området, samt bivillkoren. Skissa ett område som är mindre än det tillåtna området, där optimal placering skulle kunna inträffa och motivera varför. Varför kan inte punkten (4,0) vara optimal? Ledning: Fundera på konvext hölje. (1p)

b) Sätt upp KKT-villkoren. Kontrollera huruvida någon av punkterna (0, 0), (2, 2), (4, 2) eller (3.4, 2.3) är KKT-punkt/optimal? (3p)

c) Man kommer på att det ligger ett hus i området, så området $H = \{(x, y) : 2 < x < 3,\ 2 < y < 3\}$ kan inte användas för placering av provtagningsstationen. Ge en matematisk formulering av bivillkoren som ger det tillåtna området $X \setminus H$, dvs. X med H borttaget. (Ledning: Man behöver binära variabler.) Ge ett förslag på hur man skulle kunna lösa problemet (men lös inte). (3p)

Uppgift 3

En underleverantör till NoViR ska leverera andningsskydd till olika orter, via nedanstående nätverk. Man låter en enhet vara 1000 andningsskydd. I noderna 1 och 2 finns lager, och där ligger nu 6 och 3 enheter, och man ska leverera 3 till nod 3, 2 till nod 5 och 4 till nod 6. På bågarna står först kostnaden att transportera en enhet, sedan en övre gräns för hur många enheter som kan transporteras den vägen, och till sist hur många enheter som skickades den vägen förra gången man gjorde leveransen.



a) Det hela blir ett minkostnadsflödesproblem. Visa att den föreslagna lösningen är optimal. (2p)

b) Utgå från lösningen i uppgift a. Vissa transportörer har på grund av en pandemi förändrade kostnader. (Förare är sjukskrivna, så man får hyra in nya.) Förändringen här blir att c_{56} minskar från 6 till 4. Ändras optimallösningen? Om så är fallet, beräkna en ny optimallösning. Jämför kostnadsförändringen mellan optimallösningarna med kostnadsförändringen om man behåller samma lösning. (2p)

c) NoViR meddelar att man ska bygga ut fabriken i nod 1, och börja skicka andningsskydd utomlands från nod 6. Därför vill man veta hur mycket som överhuvudtaget kan skickas från nod 1 till nod 6. Använd ovanstående nätverk och de kapaciteter som anges. (Dock ej den angivna startlösningen.) Man är också intresserad av minsnittet, dvs. vilka bågar som begränsar maxflödet. Lös problemet med standardmetod. Visa varje steg i metoden tydligt. Ange minsnitt. Ge ett välmotiverat förslag på vilken väg man borde öka kapaciteten på. (3p)

Uppgift 4

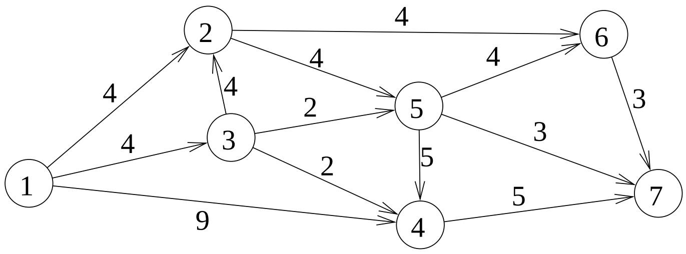
NoViR behöver öka sin produktionskapacitet. Man funderar på att utöka fabrikerna på två platser, och utbyggnaden sker i moduler. Låt x_j ange hur många moduler man bygger upp på plats j. Modulerna har olika kapacitet och kostnad. Man vill maximera total kapacitet under bivillkoret att kostnaden inte överstiger den budgeterade, vilket leder till följande linjära heltalsproblem.

$$
\begin{array}{lll}
\max & z = & 6x_1 + 4x_2 \\
\text{då} & & 7x_1 + 6x_2 \leq 19 \\
 & & x_1, x_2 \geq 0, \text{heltal}
\end{array}
$$

Lös problemet med Land-Doig-Dakins metod. LP-problem får lösas grafiskt. (3p)

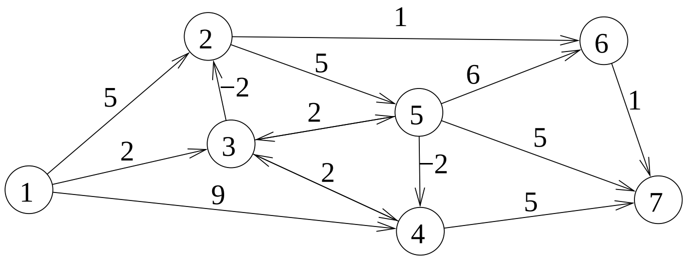
Uppgift 5

Man behöver akut skicka en sändning andningsskydd från fabriken i nod 1 i följande nätverk till nod 7. Frågan är vilken väg man ska använda. Bågarna är märkta med uppskattad restid, och man vill göra leveransen så snabbt som möjligt.



a) Vilket optimeringsproblem blir detta? Finn en optimallösning till problemet. Beskriv stegen i metoden noggrant. Ange väg och total restid. (2p)

b) Det visar sig att det uppstått klustersmitta i vissa regioner, och man vill undvika dessa orter. Man modifierar därför bågkostnaderna i nätverket (ökar vissa kostnader och minskar andra). Resultatet ges i nedanstående nätverk. Man ser också bågarna (3,5) och (3,4) som oriktade, dvs. kan användas åt valfritt håll.



Finn en billigaste väg till detta problem. Beskriv stegen i metoden noggrant. Ange bäst väg. (2p)

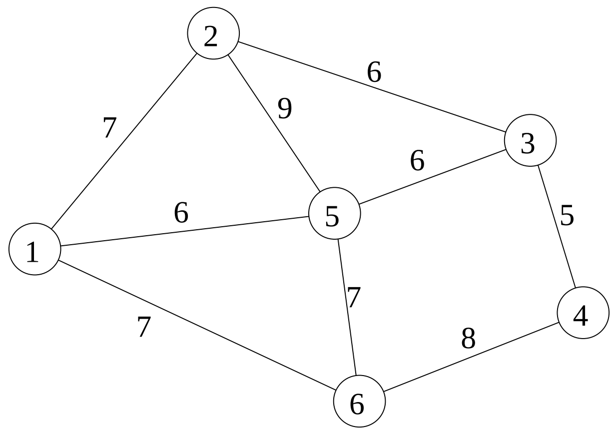
c) Betrakta lösningen i uppgift a. Man får möjlighet av göra leveransen till nod 6 istället. Skulle detta förbättra lösningen? (Lös inte om problemet). (1p)

Uppgift 6

En pandemi har gjort att många människor arbetar hemifrån, och det har gjort att internettrafiken har ökat avsevärt. Företaget Insikt tillhandahåller bredband och får problem med sitt näts kapacitet. I teorin borde kapaciteten räcka till, men i praktiken gör den inte det. Man misstänker att vissa länkar inte fungerar som de ska. Man vill därför undersöka det existerande nätet.

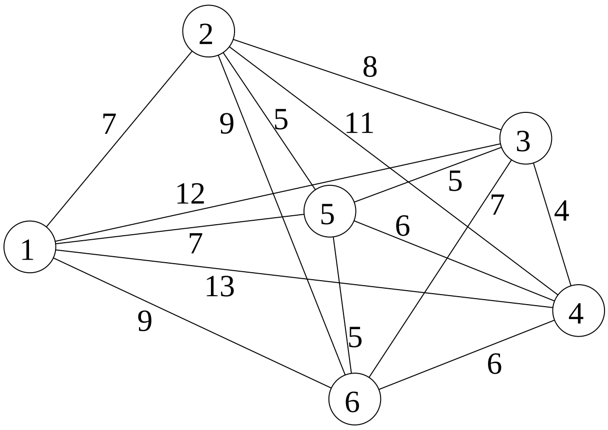
a) Man har införskattat en maskin som använder ultraljud för att undersöka kablar som går under jord genom att färdas på markytan över de nedgrävda kablarna. Man vill på detta sätt finna eventuell skador på kablarna. Tyvärr måste maskinen köra precis ovanför varje kabel i nätet.

Det nu aktuella ledningsnätet visas i följande graf. På varje båge i grafen står tiden det tar att undersöka den, dvs. för maskinen att köra längs med den. Maskinen står i nod 1 och ska köra en rundtur så att den åter hamnar i nod 1 när den har undersökt alla bågar. Man vill att undersökningen ska vara färdig så tidigt som möjligt. (Maskinen måste följa ledningsnätet även om den inte har ultraljudet på, och kör med samma hastighet även då.)



Vilket optimeringsproblem blir detta? Finn en optimallösning till problemet. Beskriv stegen i metoden noggrant. Ange rundtur och totalt avstånd. (3p)

b) Efter fullföljd undersökning enligt ovan, kommer Insikt till insikt om att det kan finnas fel i grenkopplingarna i noderna i nätverket. Undersökning av noderna kan också göras med hjälp av ultraljud, men man har nu införskaffat en drönare som kan hovra en liten stund ovanför varje nod och undersöka den. Det är i princip samma nätverk som i föregående uppgift, men nu kan drönaren flyga direkt mellan varje par av noder. Det nya nätverket, nu med bågkostnader som är flygtider för drönaren, ges i följande graf. Man vill finna den snabbaste rundturen som besöker alla noder.



Vilket känt optimeringsproblem är det att finns den bästa rundturen? Finn en bra lösning med en känd heuristik. Finn även en undre gräns för det optimala målfunktionsvärdet genom att lösa en relaxation av problemet. Ange hur långt ifrån optimum den erhålla lösningen i värsta fall är. Formulera ett linjärt bivillkor som skär bort optimallösningen till relaxationen, men ingen tillåten rundtur. (3p)

Uppgift 7

Livvaktsföretaget TRaMP (Tactical Rescue and Medical Protection) ska fördela arbetsuppgifterna för dagen. Man vill hålla sina medarbetare så nöjda som möjligt, och låter därför varje medarbetare ange en kostnad för att göra ett visst uppdrag. Man vet att vissa uppgifter, som att åka i en skottsäker bil tillsammans med en covid-sjuk president, inte är så populära, medan andra, som att gå tre steg bakom en presidentfru, är mindre otrevliga. Därefter gör man tilldelningen så att den totala kostnaden minimeras. I nedanstående matris med kostnader motsvarar raderna livvakter och kolumnerna uppgifter,

$$C = \begin{pmatrix} 35 & 27 & 15 & 8 & 15 \\ 36 & 28 & 17 & 9 & 14 \\ 37 & 28 & 17 & 9 & 14 \\ 45 & 25 & 14 & 7 & 15 \\ 45 & 26 & 15 & 8 & 15 \end{pmatrix}$$

a) Lös problemet med ungerska metoden. Ange optimal lösning samt målfunktionsvärde. Ange även dual optimallösning och kontrollera starka dualsatsen. (3p)

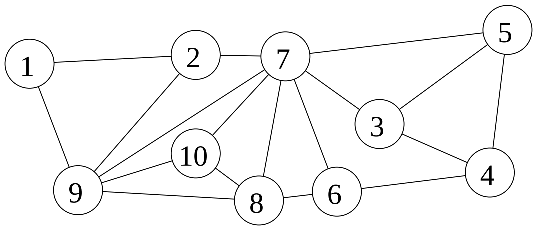
b) Rambo (rad 1) ångrar sitt karriärval. Efter att ha pratat med facket, höjer han alla sina kostnader med 100. Kommer detta att förändra den primala optimallösningen? Kommer detta att förändra den duala optimallösningen? (Lös inte om.) (1p)

Uppgift 8

Ett antal studenter känner att de, trots en pågående pandemi, vill dansa bal. Man bedömer att det enbart föreligger smittorisk från partnern man dansar med, inte från andra närvarande. Studenterna har olika rädsla för smitta, vissa bryr sig inte, andra har en äldre förälder som tillhör riskgrupp hemma. Varje student får därför göra en lista med vilka de kan tänka sig att dansa med. Med gemensamma krafter vill de sedan finna en partillordning (matchning) där så många som möjligt kommer med.

I följande graf motsvarar noderna studenter och en båge att de två kan tänka sig att dansa ihop. (Man har gjort grafen oriktad och därför tagit bort alla bågar i par där bara den ena parten kan tänka sig ingå.)

Student 2 vill helst dansa med 9, 6 helst med 8 och 5 helst med 7, men de kan alla tänka sig att underordna sig det gemensamma målet att så många som möjligt ska kunna vara med.



Vilket känt optimeringsproblem är det att bilda den parbildning som gör att så många som möjligt kan dansa? Finn en lösning med lämplig metod. Visa stegen i metoden. Starta med den önskade parbildningen ovan. Får de som de vill? (3p)