Optimum

När man har formulerat sin optimeringsmodell vill man lösa den.

Dvs. finna en optimal lösning, x^*, till modellen.

Nästan alltid: Sökmetoder:
Stå i en punkt, gå till en annan (bättre).
Upprepa, tills punkten är optimal.

Metoderna baseras på matematik, och vi behöver exakta definitioner.

Vad är optimum?
Hur vet man om punkten man står i är optimal?
Hur söker man efter optimum?

Optimum?

Globalt minimum: En punkt som är bäst. (rita)

Definition

En punkt x^* är **globalt** minimum i X om $f(x^*) \leq f(x)$ för alla $x \in X$.

Lokalt minimum: En punkt som är bäst för närsynta. (rita)

Definition

En punkt x^* är **lokalt** minimum i X om $f(x^*) \leq f(x)$ för alla $x \in X$ som är nära x^*. (T.ex. för alla $x \in X : \|x - x^*\| \leq \delta$.)

Konvexitet

Konvex mängd: Innehåller alla linjesegment mellan punkter i mängden. (rita)

Definition

En mängd X är **konvex** om $\lambda x^{(1)} + (1-\lambda)x^{(2)} \in X$ för alla $x^{(1)} \in X,\ x^{(2)} \in X,\ 0 \leq \lambda \leq 1$.

"Man kan se alla punkterna i en konvex mängd från vilken punkt som helst."
Exempel: Halvrum. Ett linjärt bivillkor.

Kombinerade mängder: Snittet av konvexa mängder är konvext. (rita)

Sats

Om X_i är konvex för alla i så är $X = \cap_i X_i$ konvex.

Exempel: Flera halvrum. Flera linjära bivillkor.

Extrempunkt

Konvexkombination: En punkt "innanför" de andra. (rita)

Definition

$\hat{x}$ är en **konvexkombination** av punkterna $x^{(k)}, k = 1, \dots, p$, om $\hat{x} = \sum_k \lambda_k x^{(k)}$, där $\sum_k \lambda_k = 1$ och $\lambda_k \geq 0$ för alla k.

Exempel: Mittpunkt. $\lambda_k = 1/p$.

Extrempunkt: En punkt som inte är en konvexkombination av två andra tillåtna punkter. Hörn. (rita)

Exempel: Origo (under bivillkoren $x_i \geq 0$ för alla i).

Polyeder

Mängd med "raka kanter".

Polyeder: (rita)

Definition

Skärningen av **ändligt** många halvrum kallas **polyeder**.

Exempel: $x_1 + x_2 \leq 1$, $x_1 \geq 0$, $x_2 \geq 0$.

Exempel: $x_1 + x_2 = 1$, $x_1 \geq 0$, $x_2 \geq 0$.

Exempel: $Ax \leq b$.

Exempel: $Ax = b$, $x \geq 0$.

En polyeder har **ändligt** många extrempunkter.

LP-problem

Ett **LP-problem**:

$$\max z = c^T x \text{ då } Ax \leq b, x \geq 0.$$

Den tillåtna mängden är en polyeder. Målfunktionen är linjär.

Var ligger optimum?

Konstant lutning på målfunktionen: Gå så långt man får åt något håll. $\Rightarrow$ Hörn.

Sats (Linjärprogrammeringens fundamentalsats)

Om ett LP-problem har begränsad optimallösning, så antas den i (minst) en extrempunkt.

Vårt första exempel

Variabeldefinition:

x_1 = antal enheter Optimus som görs varje timme.

x_2 = antal enheter Rullmus som görs varje timme.

Matematisk modell:

$$\begin{array}{llrcrcrl}
\max & z = & 4x_1 & + & 3x_2 & & & \\
\text{då} & & 2x_1 & + & 3x_2 & \leq & 30 & (1) \quad \text{(knappar)} \\
& & x_1 & & & \leq & 6 & (2) \quad \text{(optik)} \\
& & 6x_1 & + & 4x_2 & \leq & 50 & (3) \quad \text{(monteringstid)} \\
& & x_1 & & & \geq & 0 & (4) \\
& & & & x_2 & \geq & 0 & (5)
\end{array}$$

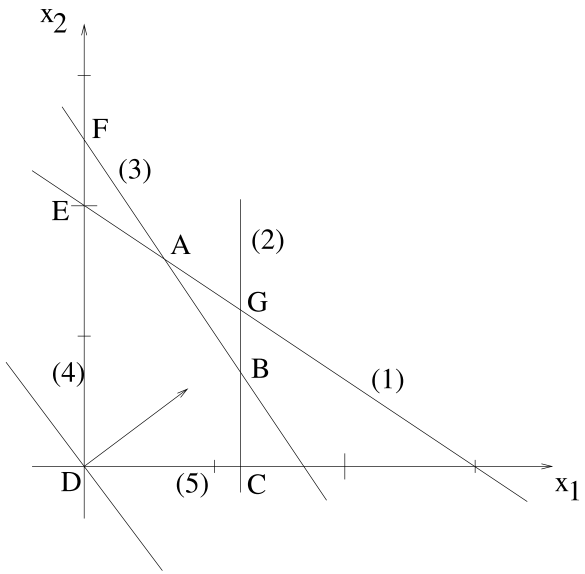
Baslösningar representerar extrempunkter

$$\begin{array}{llrcrcrl}
\max & z = & 4x_1 & + & 3x_2 & & & \\
\text{då} & & 2x_1 & + & 3x_2 & \leq & 30 & (1) \\
& & x_1 & & & \leq & 6 & (2) \\
& & 6x_1 & + & 4x_2 & \leq & 50 & (3) \\
& & x_1 & & & \geq & 0 & (4) \\
& & & & x_2 & \geq & 0 & (5)
\end{array}$$

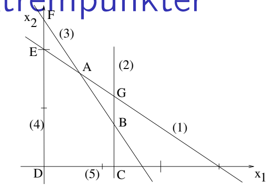
Inför slackvariabler.

$$\begin{array}{llrcrcrcrcrcr}
\max & z = & 4x_1 & + & 3x_2 & & & & & & & & \\
\text{då} & & 2x_1 & + & 3x_2 & + & x_3 & & & & & = & 30 \\
& & x_1 & & & & & + & x_4 & & & = & 6 \\
& & 6x_1 & + & 4x_2 & & & & & + & x_5 & = & 50 \\
& & x_1, & & x_2, & & x_3, & & x_4, & & x_5 & \geq & 0
\end{array}$$

Baslösningar representerar extrempunkter



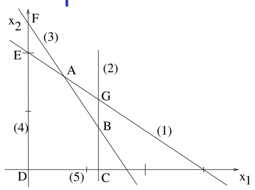
Baslösningar representerar extrempunkter



Hörn-punkt	Aktiva bivillkor	Variabler som sätts till noll	Variabler som löses ut
A	1,3	$x_3 = 0, x_5 = 0$	$x_1 = 3, x_2 = 8, x_4 = 3$
B	2,3	$x_4 = 0, x_5 = 0$	$x_1 = 6, x_2 = 7/2, x_3 = 15/2$
C	2,5	$x_2 = 0, x_4 = 0$	$x_1 = 6, x_3 = 18, x_5 = 14$
D	4,5	$x_1 = 0, x_2 = 0$	$x_3 = 30, x_4 = 6, x_5 = 50$
E	1,4	$x_1 = 0, x_3 = 0$	$x_2 = 10, x_4 = 6, x_5 = 10$
F	3,4	$x_1 = 0, x_5 = 0$	$x_2 = 25/2, x_3 = -15/2, x_4 = 6$
G	1,2	$x_3 = 0, x_4 = 0$	$x_1 = 6, x_2 = 6, x_5 = -10$

Punkt F och G ej tillåtna, ty negativa variabelvärden.

Baslösningar representerar extrempunkter



Hörn-punkt	Ickebas-variabler (=0)	Basvariabler	Målfunktion (reducerade kostnader)
A	x_3, x_5	x_1, x_2, x_4	$z = 36 - 1/5x_3 - 3/5x_5$
B	x_4, x_5	x_1, x_2, x_3	$z = 69/2 + 1/2x_4 - 3/4x_5$
C	x_2, x_4	x_1, x_3, x_5	$z = 24 + 3x_2 - 4x_4$
D	x_1, x_2	x_3, x_4, x_5	$z = 4x_1 + 3x_2$
E	x_1, x_3	x_2, x_4, x_5	$z = 30 + 2x_1 - x_3$

Punkt A optimal, ty negativa reducerade kostnader.

Baslösningar, hur byta

- Byt en basvariabel i taget.
- Öka ickebasvariabel med positiv reducerad kostnad. (Ökar z.)
- Gör ökningen så stor som möjligt,
  dvs. så att en basvariabel blir noll och ingen negativ.

Exempel

$$\begin{array}{llrcrcrcrcrcr}
\max & z = & 4x_1 & + & 3x_2 & & & & & & & & \\
\text{då} & & 2x_1 & + & 3x_2 & + & x_3 & & & & & = & 30 \\
& & x_1 & & & & & + & x_4 & & & = & 6 \\
& & 6x_1 & + & 4x_2 & & & & & + & x_5 & = & 50 \\
& & x_1, & & x_2, & & x_3, & & x_4, & & x_5 & \geq & 0
\end{array}$$

Basvariabler: x_3, x_4, x_5. Dvs. $x_1 = 0$, $x_2 = 0$ och $x_3 = 30$, $x_4 = 6$, $x_5 = 50$.

Öka x_1 (verkar bäst). Sätt $x_1 = t$, $x_2 = 0$, vilket ger

$$\begin{array}{rcrcrcrcl}
2t & + & x_3 & & & & & = & 30 \\
t & & & + & x_4 & & & = & 6 \\
6t & & & & & + & x_5 & = & 50
\end{array}$$

$x_3 = 30 - 2t \geq 0 \Rightarrow t \leq 30/2 = 15$

$x_4 = 6 - t \geq 0 \Rightarrow t \leq 6$

$x_5 = 50 - 6t \geq 0 \Rightarrow t \leq 50/6 \approx 8.333$

Ger $t = 6$, dvs. $x_1 = 6$

och $x_3 = 30 - 12 = 18$, $x_4 = 6 - 6 = 0$, $x_5 = 50 - 36 = 14$.

Baslösning, teoretiskt

Definition

En **baslösning** fås genom att välja ut m **basvariabler**, sätta **icke-basvariablerna** till noll, och lösa ut basvariablerna mha ekvationssystemet $Ax = b$.
Baslösningen är **tillåten** om alla basvariabler får icke-negativa värden.

$x = (x_B, x_N)$, $A = (B\ N)$. $Bx_B + Nx_N = b$ ger $x_B = B^{-1}b - B^{-1}Nx_N$.
Eliminera x_B från målfunktionen: $z = c_B^T x_B + c_N^T x_N = \hat{z} + \hat{c}_N^T x_N$
där $\hat{z} = c_B^T B^{-1} b$ och $\hat{c}_N = c_N - (c_B^T B^{-1} N)^T$,
eller separat $\hat{c}_j = c_j - a_j^T y$ där $y = (c_B^T B^{-1})^T$.

$\hat{c}$ kallas **reducerade kostnader**. Baslösningen som fås för $x_N = 0$ och $x_B = B^{-1}b$ är **tillåten** om $B^{-1}b \geq 0$ och **optimal** om $\hat{c}_N \leq 0$.

Sats

Varje extrempunkt i en polyeder kan definieras av en tillåten baslösning.

Simplexmetoden

Börja med att skriva problemet på likhetsform (inför slackvariabler).

0. Skaffa en tillåten startbas.

1. Välj inkommande variabel så att förbättring fås: Mest positiv reducerad kostnad, $\max_j \hat{c}_j$. (för max-problem)

Om $\hat{c}_j \leq 0$ för all j: Stopp, optimum funnet.

2. Välj utgående variabel så att tillåtenhet behålls: Minst kvot mellan högerled och positiv koefficient i inkommande kolumn, $\min_{i:\hat{a}_{ij}>0} \left(\frac{\hat{b}_i}{\hat{a}_{ij}} \right)$.

Om $\hat{a}_{ij} \leq 0$ för alla i: Stopp, lösningen är obegränsad.

3. Byt bas (pivotera): Eliminera inkommande variabel från alla andra rader. Gå till 1.

Löst exempel

$$\begin{array}{llrcrcrl}
\max & z = & 4x_1 & + & 3x_2 & & & \\
\text{då} & & 2x_1 & + & 3x_2 & \leq & 30 & (1) \\
& & x_1 & & & \leq & 6 & (2) \\
& & 6x_1 & + & 4x_2 & \leq & 50 & (3) \\
& & x_1, & & x_2 & \geq & 0 &
\end{array}$$

Inför slackvariabler, x_3, x_4, x_5.

$$\begin{array}{llrcrcrcrcrcr}
\max & z = & 4x_1 & + & 3x_2 & & & & & & & & \\
\text{då} & & 2x_1 & + & 3x_2 & + & x_3 & & & & & = & 30 \\
& & x_1 & & & & & + & x_4 & & & = & 6 \\
& & 6x_1 & + & 4x_2 & & & & & + & x_5 & = & 50 \\
& & x_1, & & x_2, & & x_3, & & x_4, & & x_5 & \geq & 0
\end{array}$$

Simplexmetoden

$$\begin{array}{llrcrcrcrcrcr}
\max & z = & 4x_1 & + & 3x_2 & & & & & & & & \\
\text{då} & & 2x_1 & + & 3x_2 & + & x_3 & & & & & = & 30 \\
& & x_1 & & & & & + & x_4 & & & = & 6 \\
& & 6x_1 & + & 4x_2 & & & & & + & x_5 & = & 50 \\
& & x_1, & & x_2, & & x_3, & & x_4, & & x_5 & \geq & 0
\end{array}$$

Starttablå:

Bas	z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	$\hat{b}$
z	1	-4	-3	0	0	0	0
x_3	0	2	3	1	0	0	30
x_4	0	1	0	0	1	0	6
x_5	0	6	4	0	0	1	50

Inkommande variabel: x_1. Utgående variabel: x_4.

Simplexmetoden

Bas	z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	$\hat{b}$
z	1	0	-3	0	4	0	24
x_3	0	0	3	1	-2	0	18
x_1	0	1	0	0	1	0	6
x_5	0	0	4	0	-6	1	14

Inkommande variabel: x_2. Utgående variabel: x_5.

Bas	z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	$\hat{b}$
z	1	0	0	0	-1/2	3/4	69/2
x_3	0	0	0	1	5/2	-3/4	15/2
x_1	0	1	0	0	1	0	6
x_2	0	0	1	0	-3/2	1/4	7/2

Inkommande variabel: x_4. Utgående variabel: x_3.

Simplexmetoden

Bas	z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	$\hat{b}$
z	1	0	0	1/5	0	3/5	36
x_4	0	0	0	2/5	1	-3/10	3
x_1	0	1	0	-2/5	0	3/10	3
x_2	0	0	1	3/5	0	-1/5	8

Ingen inkommande variabel. Optimaltablå.

Optimallösning: $x_1 = 3,\ x_2 = 8,\ z = 36$.

Slack:
Villkor 1 aktivt ($x_3 = 0$).
Villkor 2 ej aktivt ($x_4 = 3$).
Villkor 3 aktivt ($x_5 = 0$).

Skuggpriser

Skuggpriser, y, är vad man tjänar på att öka ett högerled lite.

Optimaltablå:

Bas	z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	$\hat{b}$
z	1	0	0	1/5	0	3/5	36
x_4	0	0	0	2/5	1	-3/10	3
x_1	0	1	0	-2/5	0	3/10	3
x_2	0	0	1	3/5	0	-1/5	8

Vad händer med baslösningen om jag ökar högerledet i bivillkor 1 (b_1) lite?

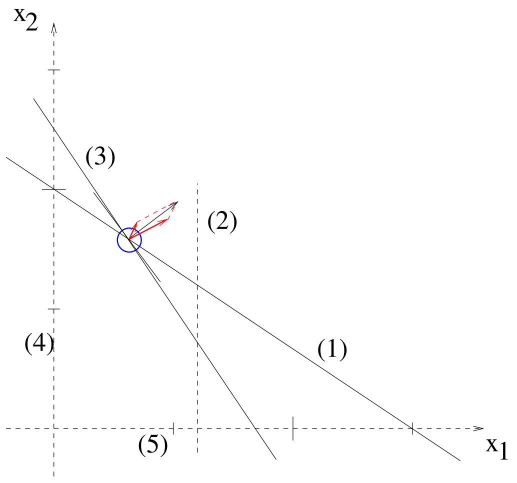
Då rör sig lösningen i motsatt riktning mot om jag ökade motsvarande slackvariabel (x_3) lite.

Effekten på målfunktionsvärdet blir den motsatta: $\hat{c}_3 = -1/5$, så $y_3 = 1/5$.

Läs av i målfunktionsraden.

Skuggpriser: $y_1 = 1/5,\ y_2 = 0,\ y_3 = 3/5$.

Simplexmetoden



Simplexmetoden, matrisform

Skriv problemet på likhetsform (inför slackvariabler), $Ax = b$.

0. Skaffa en tillåten startbas: $x = (x_B, x_N)$, $A = (B\ N)$, $c = (c_B, c_N)$.
1. Beräkna B^{-1}.
2. Beräkna högerled: $\hat{b} = B^{-1}b$. Variablernas värden: $x_B = \hat{b}, x_N = 0$.
3. Beräkna målfunktionsvärdet: $z = c_B^T x_B$.
4. Beräkna skuggpriser: $y = (c_B^T B^{-1})^T$.
5. Beräkna reducerade kostnader: $\hat{c}_N = c_N - N^T y$ (dvs $\hat{c}_j = c_j - a_j^T y$).
6. Om $\hat{c}_N \leq 0$: Stopp, optimum.
7. Välj inkommande variabel x_k så att förbättring fås: $\hat{c}_k = \max_j \hat{c}_j$.
8. Beräkna inkommande kolumn för aktuell bas: $\hat{a}_k = B^{-1}a_k$.
9. Om $\hat{a}_k \leq 0$: Stopp, problemet har obegränsad lösning.
10. Välj utgående variabel så att tillåtenhet behålls: $\dfrac{\hat{b}_l}{\hat{a}_{lk}} = \min\limits_{i:\hat{a}_{ik}>0} \left(\dfrac{\hat{b}_i}{\hat{a}_{ik}}\right)$.
11. Byt bas: Uppdatera B, N, c_B och c_N. Gå till 1.

Skuggpriser

I varje iteration beräknas skuggpriserna y (eller läses av i tablån).

Efter sista iterationen kan man använda dem för att värdera/jämföra en liten ökning av varje högerled.

Man kan också beräkna reducerad kostnad för en ny variabel: $\hat{c}_j = c_j - a_j^T y$
Här krävs bara data för den variabeln, c_j och a_j (förutom y).

Om $\hat{c}_j <= 0$ ska variabeln förbli noll.
Om $\hat{c}_j > 0$ ska variabeln ökas. Fortsätt med simplexmetoden.

Degeneration och konvergens

Definition

En baslösning där en eller flera basvariabler har värdet noll kallas **degenererad** baslösning.

Om inga baslösningar är degenererade:

- Varje extrempunkt motsvaras av exakt en baslösning.
- Varje iteration i simplexmetoden ger ett positivt värde på inkommande variabel, och en strikt förbättring i målfunktionsvärde.
- Man kan därför aldrig komma tillbaka till en redan besökt extrempunkt.
- Det finns ändligt många extrempunkter, så detta kan bara upprepas ett ändligt antal gånger.

Degeneration och konvergens

Sats

Om det tillåtna området till ett LP-problem är icketomt, och inga baslösningar är degenererade, så kommer simplexmetoden att avslutas inom ett ändligt antal iterationer.

I en degenererad baslösning: $\hat{b}_i = 0$.

Kan ge minsta kvot noll. Högerleden ändras då ej. Inkommande variabel ökas ej. En annan baslösning ger samma punkt.

Om flera basvariabler är noll: Många iterationer i samma punkt. Ingen förbättring. Samma bas *kan* återkomma.

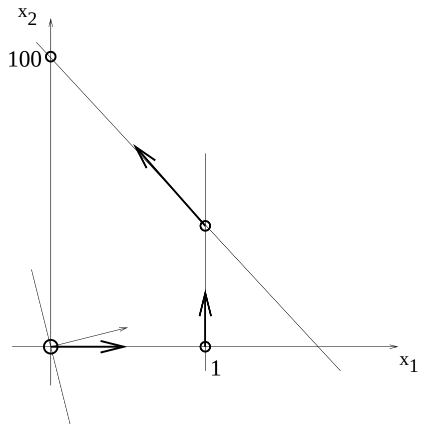
Om samma bas återkommer: Cykling!

Cykling är ovanligt i praktiken. Kan förhindras genom speciella val av inkommande och utgående variabler.

Västa fall för simplexmetoden

Berömt exempel: Klee-Minty (1972)

$$\begin{array}{llrcrcr} \max & z = & 10x_1 & + & 3x_2 & & \\ \text{då} & & x_1 & & & \leq & 1 \\ & & 20x_1 & + & x_2 & \leq & 100 \\ & & x_1, & & x_2 & \geq & 0 \end{array}$$



Besöker *alla* extrempunkter.

Västa fall för simplexmetoden

Öka antalet variabler, n.

$$\begin{array}{lrcll} \max & z = \sum_{j=1}^{n} 10^{n-j} x_j & & & \\ \text{då} & 2\sum_{j=1}^{i-1} 10^{i-j} + x_i & \leq & 100^{i-1} & i = 1, \dots, n \\ & x_j & \geq & 0 & j = 1, \dots, n \end{array}$$

Simplexmetoden kräver $2^n - 1$ iterationer.

Varje iteration kräver $O(m^2)$ (uppdatering av B^{-1}).

Empiriskt: I medel m^3 iterationer för verkliga problem.

Vårt första exempel

Variabeldefinition:

x_1 = antal enheter Optimus som görs varje timme.
x_2 = antal enheter Rullmus som görs varje timme.

Matematisk modell:

$$\begin{array}{llrcrcrll} \max & z = & 4x_1 & + & 3x_2 & & & & \\ \text{då} & & 2x_1 & + & 3x_2 & \leq & 30 & (1) & \text{(knappar)} \\ & & x_1 & & & \leq & 6 & (2) & \text{(optik)} \\ & & 6x_1 & + & 4x_2 & \leq & 50 & (3) & \text{(monteringstid)} \\ & & x_1 & & & \geq & 0 & (4) & \\ & & & & x_2 & \geq & 0 & (5) & \end{array}$$

LP-dualitet: Exempel

Primal: Maximera vinsten, utan att använda för mycket råvaror.

$$
\begin{array}{llrcrcrll}
\max & z = & 4x_1 & + & 3x_2 & & & & \\
\text{då} & & 2x_1 & + & 3x_2 & \leq & 30 & (1) & (y_1) \\
 & & x_1 & & & \leq & 6 & (2) & (y_2) \\
 & & 6x_1 & + & 4x_2 & \leq & 50 & (3) & (y_3) \\
 & & x_1, & & x_2 & \geq & 0 & &
\end{array}
$$

Dualvariabel: y_i pris på råvara i.

LP-dual: Minimera kostnaden för råvarorna. Balansera kostnad mot intäkt.

$$
\begin{array}{llrcrcrcrll}
\min & v = & 30y_1 & + & 6y_2 & + & 50y_3 & & & & \\
\text{då} & & 2y_1 & + & y_2 & + & 6y_3 & \geq & 4 & (1) & (x_1) \\
 & & 3y_1 & & & + & 4y_3 & \geq & 3 & (2) & (x_2) \\
 & & y_1, & & y_2, & & y_3 & \geq & 0 & &
\end{array}
$$

Komplementaritetsvillkoren:
Priset är noll om råvaran inte används fullt ut.
Produkten görs ej om kostnaden blir högre än intäkten.

LP-dualitet: Generellt

Primal:

$$
\begin{array}{lll}
\max & z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j & \\
\text{då} & \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \leq b_i & i = 1, \ldots, m \\
 & x_j \geq 0 & j = 1, \ldots, n
\end{array}
\qquad
\begin{array}{lll}
\max & z = & c^T x \\
\text{då} & & Ax \leq b \\
 & & x \geq 0
\end{array}
$$

Dual:

$$
\begin{array}{lll}
\min & v = \sum_{i=1}^{m} b_i y_i & \\
\text{då} & \sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i \geq c_j & j = 1, \ldots, n \\
 & y_i \geq 0 & i = 1, \ldots, m
\end{array}
\qquad
\begin{array}{lll}
\min & v = & b^T y \\
\text{då} & & A^T y \geq c \\
 & & y \geq 0
\end{array}
$$

LP-dualitet: Relationer

Exakt vilka relationer har primal och dual?

Svaga dualsatsen

Om x är tillåten i primalen och y är tillåten i dualen så $c^T x \leq b^T y$.

(bevis) (rita)

Följdsats

Om $\bar{x}$ är tillåten i primalen, $\bar{y}$ är tillåten i dualen och $c^T \bar{x} = b^T \bar{y}$ så är $\bar{x}$ optimal i primalen och $\bar{y}$ optimal i dualen.

(se figur)

Följdsats

Om primalen (dualen) är obegränsad, så saknar dualen (primalen) tillåten lösning.

Båda kan dock sakna lösning.

LP-dualitet: Komplementaritet

En dualvariabel, y_i, anger hur mycket primala bivillkor i "tar emot".

Ett bivillkor som inte är aktivt tar inte emot alls.

Komplementaritet (i ord):
Om primala bivillkor i inte är aktivt, måste $y_i = 0$.
Om duala bivillkor j inte är aktivt, måste $x_j = 0$.

Komplementaritetsvillkoren

Primallösningen x och duallösningen y uppfyller komplementaritetsvillkoren om

$$y_i \left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j - b_i \right) = 0 \quad i = 1, \ldots, m$$

$$x_j \left(\sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i - c_j \right) = 0 \quad j = 1, \ldots, n$$

LP-dualitet: Komplementaritet

Komplementaritetsvillkoren kan skrivas som

$$y^T(Ax - b) = 0$$

$$x^T(A^Ty - c) = 0$$

Sats

Om x och y uppfyller komplementaritetsvillkoren, så är $c^Tx = b^Ty$.

(peka på bevis)

Följdsats

Om x är tillåten i primalen, y är tillåten i dualen och x och y uppfyller komplementaritetsvillkoren, så är x optimal i primalen och y optimal i dualen.

Åt andra hållet:

Starka dualsatsen

Om x och y är optimallösningar så gäller $c^Tx = b^Ty$.

LP-dualitet: Slutsatser

Fullständiga dualsatsen

• Om primalen har en tillåten, begränsad optimallösning, x^*, så har även dualen en tillåten, begränsad optimallösning, y^*, och $c^Tx^* = b^Ty^*$.
• Om primalen är obegränsad, så saknar dualen tillåten lösning.
• Om primalen saknar tillåten lösning, så saknar dualen lösning eller har obegränsad lösning.

(Symmetriskt i primal - dual.)

Optimalitetsvillkor (KKT)

Primal tillåtenhet +
Dual tillåtenhet +
Komplementaritet
= Optimalitet

LP-dualitet: Formulering

Standard:

$$\left\{\begin{array}{lll} \text{Primal:} & & \\ \max & z = & c^Tx \\ \text{då} & & Ax \leq b \\ & & x \geq 0 \end{array}\right\} \left\{\begin{array}{lll} \text{Dual:} & & \\ \min & v = & b^Ty \\ \text{då} & & A^Ty \geq c \\ & & y \geq 0 \end{array}\right\}$$

Variationer:

Primal		Dual
max		min
$Ax \leq b$	$\Rightarrow$	$y \geq 0$
$Ax \geq b$	$\Rightarrow$	$y \leq 0$
$Ax = b$	$\Rightarrow$	y fri
$x \geq 0$	$\Rightarrow$	$A^Ty \geq c$
$x \leq 0$	$\Rightarrow$	$A^Ty \leq c$
x fri	$\Rightarrow$	$A^Ty = c$

LP-dualitet: Formulering, symmetriskt

Standard:

$$\left\{\begin{array}{lll} \text{Primal/dual:} & & \\ \max & z = & c^Tx \\ \text{då} & & Ax \leq b \\ & & x \geq 0 \end{array}\right\} \left\{\begin{array}{lll} \text{Dual/primal:} & & \\ \min & v = & b^Ty \\ \text{då} & & A^Ty \geq c \\ & & y \geq 0 \end{array}\right\}$$

Variationer:

*		*
max		min
$Ax \leq b$	$\Leftrightarrow$	$y \geq 0$
$Ax \geq b$	$\Leftrightarrow$	$y \leq 0$
$Ax = b$	$\Leftrightarrow$	y fri
$x \geq 0$	$\Leftrightarrow$	$A^Ty \geq c$
$x \leq 0$	$\Leftrightarrow$	$A^Ty \leq c$
x fri	$\Leftrightarrow$	$A^Ty = c$

LP-dualitet: Formulering: Exempel

Primal:

$$
\begin{array}{llrcrcrcrl}
\max & z = & 2x_1 & + & 3x_2 & - & 5x_3 & & & \\
\text{då} & & 2x_1 & + & 3x_2 & + & 2x_3 & \leq & 10 & (1) \quad \color{red}{(y_1)} \\
& & 7x_1 & + & x_2 & - & x_3 & \geq & 16 & (2) \quad \color{red}{(y_2)} \\
& & 3x_1 & + & 4x_2 & + & 4x_3 & = & 43 & (3) \quad \color{red}{(y_3)} \\
& & x_1 & \geq 0, & x_2 & \text{fri,} & x_3 & \leq 0 & &
\end{array}
$$

LP-dual:

$$
\begin{array}{llrcrcrcrl}
\min & v = & 10y_1 & + & 16y_2 & + & 43y_3 & & & \\
\text{då} & & 2y_1 & + & 7y_2 & + & 3y_3 & \geq & 2 & (1) \quad \color{red}{(x_1)} \\
& & 3y_1 & + & y_2 & + & 4y_3 & = & 3 & (2) \quad \color{red}{(x_2)} \\
& & 2y_1 & - & y_2 & + & 4y_3 & \leq & -5 & (3) \quad \color{red}{(x_3)} \\
& & y_1 & \geq 0, & y_2 & \leq 0, & y_3 & \text{fri} & &
\end{array}
$$

Komplementaritetsvillkoren:

$$
\begin{array}{l}
y_1\ (2x_1 + 3x_2 + 2x_3 - 10) = 0 \\
y_2\ (7x_1 + x_2 - x_3 - 16) = 0 \\
x_1\ (2y_1 + 7y_2 + 3y_3 - 2) = 0 \\
x_3\ (2y_1 - y_2 + 4y_3 + 5) = 0
\end{array}
$$

Dualitet och baslösningar

Att stoppa in en optimal baslösning i LP-dualen och använda komplementaritet ger följande.

Lösning: $x_B = B^{-1}b,\ x_N = 0,\ y = {B^{-1}}^T c_B$.

Dual tillåtenhet $\Leftrightarrow$ primal optimalitet.

Starka dualsatsen, version 2

Om primalen har en tillåten, begränsad optimallösning, $x^* = B^{-1}b$, så har även dualen en tillåten, begränsad optimallösning, som ges av $y^* = {B^{-1}}^T c_B$.

Både primalen och dualen har det optimala målfunktionsvärdet $z^* = c_B^T B^{-1} b$.

LP-dualitet: Exempel

$$
\begin{array}{llrcrcrl}
\max & z = & 4x_1 & + & 3x_2 & & & \\
\text{då} & & 2x_1 & + & 3x_2 & \leq & 30 & (1) \quad \color{red}{(y_1)} \\
& & x_1 & & & \leq & 6 & (2) \quad \color{red}{(y_2)} \\
& & 6x_1 & + & 4x_2 & \leq & 50 & (3) \quad \color{red}{(y_3)} \\
& & x_1, & & x_2 & \geq & 0 &
\end{array}
$$

LP-dual:

$$
\begin{array}{llrcrcrcrl}
\min & v = & 30y_1 & + & 6y_2 & + & 50y_3 & & & \\
\text{då} & & 2y_1 & + & y_2 & + & 6y_3 & \geq & 4 & (1) \quad \color{red}{(x_1)} \\
& & 3y_1 & & & + & 4y_3 & \geq & 3 & (2) \quad \color{red}{(x_2)} \\
& & y_1, & & y_2, & & y_3 & \geq & 0 &
\end{array}
$$

Komplementaritetsvillkoren:

$$
\begin{array}{l}
y_1\ (2x_1 + 3x_2 - 30) = 0 \\
y_2\ (x_1 - 6) = 0 \\
y_3\ (6x_1 + 4x_2 - 50) = 0 \\
x_1\ (2y_1 + y_2 + 6y_3 - 4) = 0 \\
x_2\ (3y_1 + 4y_3 - 3) = 0
\end{array}
$$

LP-dualitet: Exempel

Primal optimallösning: $x_1 = 3,\ x_2 = 8,\ z = 36$.

Basvariabler $x_1,\ x_2,\ x_4$.

Villkor 1 aktivt.
Villkor 2 ej aktivt $\Rightarrow y_2 = 0$.
Villkor 3 aktivt.

$x_1 > 0 \Rightarrow 2y_1 + y_2 + 6y_3 = 4$.
$x_2 > 0 \Rightarrow 3y_1 + 4y_3 = 3$.

Dual optimallösning: $y_1 = 1/5,\ y_2 = 0,\ y_3 = 3/5$.

LP-dualitet och simplextablån

Duallösningen återfinnes under slackvariablerna i optimaltablån.

Bas	z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	$\hat{b}$
z	1	0	0	1/5	0	3/5	36
x_4	0	0	0	2/5	1	-3/10	3
x_1	0	1	0	-2/5	0	3/10	3
x_2	0	0	1	3/5	0	-1/5	8

Dual optimallösning: $y_1 = 1/5,\ y_2 = 0,\ y_3 = 3/5$.

LP-dualitet: Kappsäcksproblem: Exempel

$$\begin{array}{llrcrcrcrcrl}
\max & z = & 2x_1 & + & 3x_2 & + & 5x_3 & + & 7x_4 & & & \\
\text{då} & & 2x_1 & + & 2x_2 & + & 2x_3 & + & 4x_4 & \leq & 10 & (y) \\
& & x_1, & & x_2, & & x_3, & & x_4 & \geq & 0 &
\end{array}$$

LP-dual:

$$\begin{array}{llrcrll}
\min & v = & 10y & & & & \\
\text{då} & & 2y & \geq & 2 & (1) & (x_1) \\
& & 2y & \geq & 3 & (2) & (x_2) \\
& & 2y & \geq & 5 & (3) & (x_3) \\
& & 4y & \geq & 7 & (4) & (x_4) \\
& & y & \geq & 0 & &
\end{array}$$

Skriv som: min $v = 10y$ då $y \geq 1, y \geq 3/2, y \geq 5/2, y \geq 7/4, y \geq 0$

Optimallösning: $y = 5/2,\ v = 25$.

Komplementaritetsvillkoren:
Endast duala bivillkor 3 aktivt. $\Rightarrow x_1 = 0,\ x_2 = 0,\ x_4 = 0$.

$y > 0 \Rightarrow 2x_3 = 10 \Rightarrow x_3 = 5$. Problemet löst.

Det blev en metod! $\max_j(c_j/a_j)$ ger bästa x_j. Ta med den.

LP-dualitet: Exempel

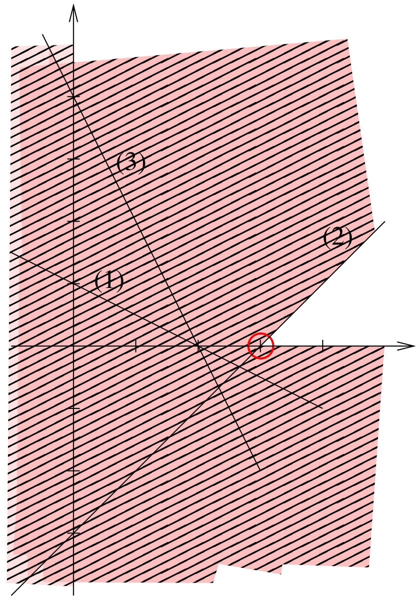
$$\begin{array}{llrcrcrcrl}
\max & z = & 2x_1 & + & 3x_2 & + & 4x_3 & & & \\
\text{då} & & x_1 & + & x_2 & + & 2x_3 & \leq & 5 & (y_1) \\
& & 2x_1 & - & x_2 & + & x_3 & \leq & 3 & (y_2) \\
& & x_1, & & x_2, & & x_3 & \geq & 0 &
\end{array}$$

LP-dual:

$$\begin{array}{llrcrcrll}
\min & v = & 5y_1 & + & 3y_2 & & & & \\
\text{då} & & y_1 & + & 2y_2 & \geq & 2 & (1) & (x_1) \\
& & y_1 & - & y_2 & \geq & 3 & (2) & (x_2) \\
& & 2y_1 & + & y_2 & \geq & 4 & (3) & (x_3) \\
& & y_1, & & y_2 & \geq & 0 & &
\end{array}$$

LP-dualen 2-dimensionell. Lös grafiskt.

LP-dualitet: Exempel



Dual optimalpunkt: $y_1 = 3,\ y_2 = 0$.
Duala bivillkor 1 och 3 inte aktiva.

LP-dualitet: Exempel

$$
\begin{array}{llrcrcrcrl}
\max & z = & 2x_1 & + & 3x_2 & + & 54_3 & & & \\
\text{då} & & x_1 & + & x_2 & + & 2x_3 & \leq & 5 & (y_1) \\
 & & 2x_1 & - & x_2 & + & x_3 & \leq & 3 & (y_2) \\
 & & x_1, & & x_2, & & x_3 & \geq & 0 &
\end{array}
$$

LP-dual:

$$
\begin{array}{llrcrcrll}
\min & v = & 5y_1 & + & 3y_2 & & & & \\
\text{då} & & y_1 & + & 2y_2 & \geq & 2 & (1) & (x_1) \\
 & & y_1 & - & y_2 & \geq & 3 & (2) & (x_2) \\
 & & 2y_1 & + & y_2 & \geq & 4 & (3) & (x_3) \\
 & & y_1, & & y_2 & \geq & 0 & &
\end{array}
$$

LP-dualen 2-dimensionell. Lös grafiskt.

Optimallösning: $y_1 = 3,\ y_2 = 0,\ v = 15$.

Komplementaritetsvillkoren:
Duala bivillkor 1 och 3 inte aktiva. $\Rightarrow x_1 = 0,\ x_3 = 0$.

$y_1 > 0 \Rightarrow x_2 = 5$. Problemet löst. (Kolla gärna primala bivillkor 2.)

Lösning: $x_1 = 0,\ x_2 = 5,\ x_3 = 0,\ z = 15$. (Kolla gärna z.)

Skuggpriser

Hur mycket förändras det optimala målfunktionsvärdet av en liten ändring av ett högerled?

Detta mått kallas **skuggpris** (eller marginalpris).

Starka dualsatsen: $z = c^T x = b^T y$ eller $z = \sum_j c_j x_j = \sum_i b_i y_i$

Derivatan av z med avseende på b_i är y_i.

Slutsats

Skuggpriserna ges av den optimala duallösningen.

I exemplet: Dual målfunktion: $v = b_1 y_1 + b_2 y_2$.

Stoppa in dual optimallösning: $y_1 = 3,\ y_2 = 0$ ger $v = 3b_1$.

En enhets ökning av b_1 ger 3 enheters ökning av v, dvs. z.

En enhets ökning av b_2 ger ingen ändring av v, dvs. z.

Skuggpriser

I en viss baslösning har vi $x_B = B^{-1}b$ och $y = {B^{-1}}^T c_B$.

Skuggpriserna är oförändrade så länge som B^{-1} och c_B är oförändrade, dvs. så länge som samma baslösning är optimal.

Om ändringen i b ger $B^{-1}b \not\geq 0$, ändras optimal baslösning/skuggpriser.

$B^{-1}b \geq 0$ ger gränser på b för oförändrad optimallösning.

Känslighetsanalys

Har optimallösning.

Indata ändras.

Vad händer?

Är optimallösningen helt oförändrad?

Är optimala baslösningen oförändrad?

För hur stora ändringar ändras inte (bas)lösningen?

Om optimal baslösning inte ändras blir alla förändringar lätta att räkna ut, för då ändras inte B^{-1}.
Stoppa in nya b och/eller c i $x_B = B^{-1}b$, $y = {B^{-1}}^T c_B$ och $z = c_B^T x_B$.

Ny variabel, x_j, med kolumn a_j och målfunktionskoefficient c_j:
Ska den ökas? Kolla primal optimalitet: $\hat{c}_j = c_j - a_j^T y^* \leq 0$.

Vårt musexempel

$$
\begin{array}{llrcrcrll}
\max & z = & 4x_1 & + & 3x_2 & & & & \\
\text{då} & & 2x_1 & + & 3x_2 & \leq & 30 & (1) & (y_1)\ \text{(knappar)} \\
 & & x_1 & & & \leq & 6 & (2) & (y_2)\ \text{(optik)} \\
 & & 6x_1 & + & 4x_2 & \leq & 50 & (3) & (y_3)\ \text{(monteringstid)} \\
 & & x_1, & & x_2 & \geq & 0 & &
\end{array}
$$

LP-dual:

$$
\begin{array}{llrcrcrcrll}
\min & v = & 30y_1 & + & 6y_2 & + & 50y_3 & & & & \\
\text{då} & & 2y_1 & + & y_2 & + & 6y_3 & \geq & 4 & (1) & (x_1)\ \text{(Optimus)} \\
 & & 3y_1 & & & + & 4y_3 & \geq & 3 & (2) & (x_2)\ \text{(Rullmus)} \\
 & & y_1, & & y_2, & & y_3 & \geq & 0 & &
\end{array}
$$

Optimaltablå:

Bas	z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	$\hat{b}$
z	1	0	0	1/5	0	3/5	36
x_4	0	0	0	2/5	1	-3/10	3
x_1	0	1	0	-2/5	0	3/10	3
x_2	0	0	1	3/5	0	-1/5	8

Känslighetsanalys i simplextablån

Optimaltablå för vårt exempel:

Bas	z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	$\hat{b}$
z	1	0	0	1/5	0	3/5	36
x_4	0	0	0	2/5	1	-3/10	3
x_1	0	1	0	-2/5	0	3/10	3
x_2	0	0	1	3/5	0	-1/5	8

Optimallösning: $x_1 = 3,\ x_2 = 8,\ z = 36.$
Skuggpriser: $y_1 = 1/5,\ y_2 = 0,\ y_3 = 3/5.$

Vad skulle vi tjäna på en ökning av tillgången av knappar?

Det är en ökning av b_1, så vi tjänar $y_1 = 1/5$ per enhets ökning.

För hur stor ökning gäller detta? Kolla $B^{-1}b \geq 0$.

Känslighetsananlys i simplextablån (överkurs)

Kan läsa av B^{-1} under slackvariablerna i optimaltablån.

Bas	z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	$\hat{b}$
z	1	0	0	1/5	0	3/5	36
x_4	0	0	0	2/5	1	-3/10	3
x_1	0	1	0	-2/5	0	3/10	3
x_2	0	0	1	3/5	0	-1/5	8

$$
B^{-1}b = \begin{pmatrix} 2/5 & 1 & -3/10 \\ -2/5 & 0 & 3/10 \\ 3/5 & 0 & -1/5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 \\ 6 \\ 50 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2b_1/5 - 9 \\ -2b_1/5 + 15 \\ 3b_1/5 - 10 \end{pmatrix} \geq 0
$$

vilket ger $22.5 \leq b_1 \leq 37.5$.

Så vi tjänar 1/5 kr per ytterligare knapp, för b_1 upp till 37.5.

Exempel: Ny variabel

Ska Mickey AB göra en ny sorts mus, SuperGamer, som består av en knapp och två optiska enheter, kräver 5 min för montering och ger intäkten 3 kr/enhet?

Ny variabel, x_6: kolumn: $a_6 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}$ målfunktionskoefficient: $c_6 = 3$.

Dual optimallösning (skuggpriser) : $y_1 = 1/5,\ y_2 = 0,\ y_3 = 3/5.$

Reducerad kostnad (dual tillåtenhet):
$\hat{c}_6 = c_6 - a_6^T y = 3 - (1/5 + 3) = -1/5 \leq 0.$

Slutsats: Låt x_6 förbli noll. Gör inga SuperGamer.

Mickey vill justera priset så att SuperGamer blir lönsam.

Bestäm c_6 så att $\hat{c}_6 > 0$:

$\hat{c}_6 = c_6 - a_6^T y = c_6 - (1/5 + 3) = c_6 - 3.2 > 0$ om $c_6 > 3.2$.

För att få lite marginal sätter man priset så att intäkten blir 3:50 kr.

Känslighetsananlys från koder

Indatafil: (GMPL)

```
var x1 >= 0;
var x2 >= 0;

maximize obj:    4*x1 + 3*x2;
subject to con1: 2*x1 + 3*x2 <= 30;
subject to con2:   x1        <= 6;
subject to con3: 6*x1 + 4*x2 <= 50;
end;
```

Lösning av problemet: Skriv

```
glpsol -m lp-ko1.mod -o lp-ko1.sol
```


Känslighetsananlys från koder

På skärmen (rensat):

```
Reading model section from lp-ko1.mod...
11 lines were read
Model has been successfully generated
GLPK Simplex Optimizer, v4.44
4 rows, 2 columns, 7 non-zeros
Preprocessing...
2 rows, 2 columns, 4 non-zeros
Scaling...
 A: min|aij| =  2.000e+00  max|aij| =  6.000e+00  ratio =  3.000e+00
Problem data seem to be well scaled
Constructing initial basis...
Size of triangular part = 2
*     0: obj =   0.000000000e+00  infeas =  0.000e+00 (0)
*     3: obj =   3.600000000e+01  infeas =  0.000e+00 (0)
OPTIMAL SOLUTION FOUND
Time used:   0.0 secs
Memory used: 0.1 Mb (108000 bytes)
Writing basic solution to ‘lp-ko1.sol’...
```


Känslighetsananlys från koder

I utdatafilen lp-ko1.sol (rensat):

```
Problem:    lp
Rows:       4
Columns:    2
Non-zeros:  7
Status:     OPTIMAL
Objective:  obj = 36 (MAXimum)

 No.   Row name   St  Activity  Lower bound  Upper bound  Marginal
--- ------------ -- ----------- ----------- ------------ -----------
  1 obj          B          36
  2 con1         NU         30                        30         0.2
  3 con2         B           3                         6
  4 con3         NU         50                        50         0.6

 No. Column name  St  Activity  Lower bound  Upper bound  Marginal
--- ------------ -- ----------- ----------- ------------- ----------
  1 x1           B           3          0
  2 x2           B           8          0

Karush-Kuhn-Tucker optimality conditions:
```


Känslighetsananlys från koder

Lösning av problemet med känslighetsanalys: Skriv

```
glpsol -m lp-ko1.mod --bounds lp-ko1.bnd
```

I utdatafilen lp-ko1.bnd (rensat):

```
GLPK 4.44 - SENSITIVITY ANALYSIS REPORT
Problem:    lpluma
Objective:  obj = 36 (MAXimum)

   No. Row name     St      Activity         Slack   Lower bound      Activity     C
                                          Marginal   Upper bound         range
------ ------------ -- ------------- ------------- -------------  ------------- ------
     1 obj          BS      36.00000     -36.00000          -Inf      30.00000     -
                                             .              +Inf      36.00000

     2 con1         NU      30.00000          .             -Inf      22.50000
                                            .20000      30.00000      37.50000

     3 con2         BS       3.00000       3.00000          -Inf          .        -
                                             .           6.00000       8.33333

     4 con3         NU      50.00000          .             -Inf      40.00000
                                            .60000      50.00000      60.00000
```

Känslighetsananlys från koder

Sida 2 i utdatafilen lp-ko1.bnd (rensat):

```
GLPK 4.44 - SENSITIVITY ANALYSIS REPORT
Problem:    lpluma
Objective:  obj = 36 (MAXimum)

   No. Column name  St      Activity      Obj coef    Activity      Obj coef  Obj value a
                                          Marginal       range         range   break poin
------ ------------ -- ------------- ------------- ---------- ------------- ------------
     1 x1           BS       3.00000       4.00000       -Inf       2.00000      30.0000
                                             .        6.00000       4.50000      37.5000

     2 x2           BS       8.00000       3.00000    3.50000       2.66667      33.3333
                                             .       10.00000       6.00000      60.0000

End of report
```


Vileopt

Att tänka på inför lab 2:

Skuggpris? Reducerad kostnad?
Vad händer om man gör fel i simpexmetoden?