Flöde i nätverk

Det ligger högar av "viktiga saker" på några platser, och de ska transporteras till andra platser. Kostnaderna är linjära.

Variabeldefinition: x_{ij} = flöde i båge (i, j).

Bågdata för båge (i, j):

- c_{ij}: flödeskostnad per enhet.
- u_{ij}: övre gräns för flödet.
- l_{ij}: undre gräns för flödet.

Bivillkor: $l_{ij} \leq x_{ij} \leq u_{ij}$

Noddata för nod i:

- b_i: källstyrka/sänkstyrka. (måste vara givet)

Nodjämviktsvillkor: $\displaystyle\sum_{j:(j,i)\in B} x_{ji} - \sum_{j:(i,j)\in B} x_{ij} = b_i$ för alla $i \in N$ (in - ut)

Krav på indata: $\displaystyle\sum_i b_i = 0$.

Flöde i nätverk

Sats

Varje anslutningsmatris är fullständigt unimodulär.

Slutsats

Flödesproblem kan betraktas som LP-problem. Flödet blir automatiskt heltal.

Obs: Inga andra bivillkor får finnas.

Minkostnadsflödesproblemet

Skicka efterfrågade mängder så billigt som möjligt.

$$\begin{aligned}
\min \quad & \sum_{(i,j)\in B} c_{ij}x_{ij} \\
\text{då} \quad & \sum_{j:(j,i)\in B} x_{ji} - \sum_{j:(i,j)\in B} x_{ij} = b_i \ \text{ för alla } i \in N \\
& l_{ij} \le x_{ij} \le u_{ij} \ \text{ för alla } (i,j) \in B
\end{aligned}$$

Specialfall av minkostnadsflödesproblemet

Billigaste väg-problemet: Minkostnadsflödesproblem med en källa och en sänka, båda av styrka ett.

$$b_i = \begin{cases} -1 & \text{då } i = s \\ 1 & \text{då } i = t \\ 0 & \text{f ö} \end{cases}$$

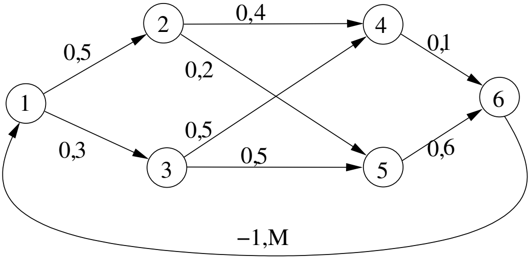
$l_{ij} = 0$ och u_{ij} stor (men i praktiken 1) för alla bågar.

Riktade brevbärarproblemet: Cirkulerande minkostnadsflödesproblem med undre gräns ett för alla bågar.

Specialfall av minkostnadsflödesproblemet

Maxflödesproblemet: Inför återbåge (t, s). Sätt $c_{ts} = -1$ och $c_{ij} = 0$ för alla $(i, j) \in B \setminus (ts)$. Sök cirkulerande flöde (inga källor eller sänkor).

$$\begin{aligned}
\max \quad & f \\
\text{då} \quad & \sum_{j:(j,i)\in B} x_{ji} - \sum_{j:(i,j)\in B} x_{ij} = \begin{cases} -f & \text{då } i = s \\ f & \text{då } i = t \\ 0 & \text{f ö} \end{cases} \quad \text{för alla } i \in N \\
& 0 \le x_{ij} \le u_{ij} \quad \text{för alla } (i,j) \in B \\
& f \text{ fri}
\end{aligned}$$



Specialfall av minkostnadsflödesproblemet

Transportproblemet: Minkostnadsflödesproblem i tudelad graf.

$$
\begin{aligned}
\min \quad & \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij} \\
\text{då} \quad & \sum_{j=1}^{n} x_{ij} = s_i \qquad i = 1, \dots m \\
& \sum_{i=1}^{m} x_{ij} = d_j \qquad j = 1, \dots n \\
& x_{ij} \geq 0 \qquad\quad \text{för alla } i, j
\end{aligned}
$$

Kan ses som ett matrisproblem, där i står för rader och j för kolumner. Bivillkoren specificerar radsummor och kolumnsummor.

(Eftersom detta är ett minkostnadsflödesproblem blir lösningen heltal.)

Specialfall av minkostnadsflödesproblemet

Tillordningsproblemet: Transportproblem med all tillgång och efterfrågan lika med ett.

Varje person i skall göra en uppgift och varje uppgift j ska göras en gång.

Variabeldefinition: $x_{ij} = 1$ om person i gör uppgift j.

$$
\begin{array}{lll}
\min & \displaystyle\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij} & \\
\text{då} & \displaystyle\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = 1 & i = 1, \ldots n \\
& \displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_{ij} = 1 & j = 1, \ldots n \\
& x_{ij} \geq 0 & \text{för alla } i, j
\end{array}
$$

Lösningsmetod: **Ungerska metoden**. Baseras på LP-dualen.

(Eftersom detta är ett minkostnadsflödesproblem blir lösningen heltal.)

Lösningsmetod för minkostnadsflödesproblemet

$$
\begin{aligned}
\text{min} \quad & \sum_{(i,j)\in B} c_{ij}x_{ij} \\
\text{då} \quad & \sum_{j:(j,i)\in B} x_{ji} - \sum_{j:(i,j)\in B} x_{ij} = b_i \;\; \text{för alla } i \in N \\
& l_{ij} \le x_{ij} \le u_{ij} \;\; \text{för alla } (i,j) \in B
\end{aligned}
$$

Simplexmetoden

Baslösning:

Icke-basvariabler: $x_{ij} = l_{ij}$ eller $x_{ij} = u_{ij}$.
(Övre och undre gränser behandlas implicit.)

Hur många basvariabler?
Ett av nodjämviktsvillkoren är redundant. En $n \times n$-matris vore linjärt beroende. Kan bara ha bas av dimension $n - 1$. Alltså $n - 1$ basvariabler.

En cykel motsvarar linjärt beroende. Alltså ingen cykel i basen.

Slutsats: En bas motsvarar ett **uppspännande träd**.

Simplexmetoden för minkostnadsflödesproblemet

En iteration:

Basvariablerna ger ett *uppspännande träd*.

Inkommande variabel bildar en unik *cykel*.

Man vill skicka runt så mycket som möjligt i cykeln.

Utgående variabel begränsar flödesändringen i cykeln. Den hamnar på övre eller undre gräns.

Utgående variabel bryter upp cykeln.

Simplexmetoden för minkostnadsflödesproblemet

Hur välja inkommande variabel?

y: dualvariabler till nodjämviktsvillkoren. y_i kallas nodpris för nod i.

Reducerade kostnader: $\hat{c}_{ij} = c_{ij} + y_i - y_j$.

(Nod i till j: Jämför skillnaden i nodpris, $y_j - y_i$, med direktvägen, c_{ij}.)

Minimering

$\hat{c}_{ij} < 0 \Rightarrow$ Båge (i, j) billig. $\Rightarrow$ Skicka så mycket som möjligt. $\Rightarrow$ Öka x_{ij}.
$x_{ij} = u_{ij}$ är optimalt.

$\hat{c}_{ij} > 0 \Rightarrow$ Båge (i, j) dyr. $\Rightarrow$ Skicka så lite som möjligt. $\Rightarrow$ Minska x_{ij}.
$x_{ij} = l_{ij}$ är optimalt.

Optimalitetsvillkor

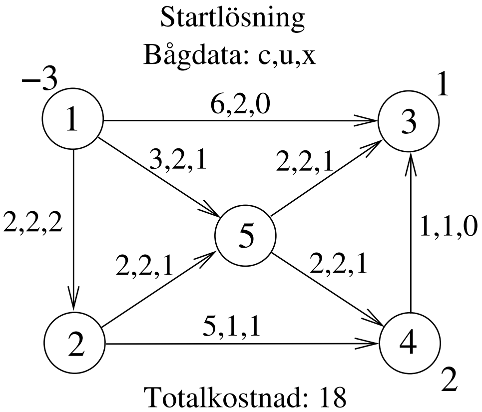
$\hat{c}_{ij} < 0 \Rightarrow x_{ij} = u_{ij}$, (billig ickebas)
$\hat{c}_{ij} > 0 \Rightarrow x_{ij} = l_{ij}$ (dyr ickebas)
samt $l_{ij} < x_{ij} < u_{ij} \Rightarrow \hat{c}_{ij} = 0$ (bas). (Används för att räkna ut y.)

Simplexmetoden för minkostnadsflödesproblemet

0. Finn tillåten startbas (träd).
1. Sätt $y_1 = 0$. Beräkna resterande y via basträdet. ($c_{ij} = y_j - y_i$ för alla basbågar.)
2. Beräkna reducerade kostnader $\hat{c}_{ij} = c_{ij} + y_i - y_j$ för alla icke-basbågar.
3. Kontrollera optimalitet. Om optimum: Stopp.
4. Välj mest lovande variabel som inkommande.
5. Finn cykeln som bildas.
6. Ändra flödet i cykeln maximalt i önskad riktning.
7. Välj den variabel som begränsar ändringen som utgående variabel.
8. Gå till 1.

Simplexmetoden för minkostnadsflöde: Exempel

Indata:



Simplexmetoden för minkostnadsflödesproblemet

Känslighetsanalys

Ändring av kostnad för icke-basbåge eller införande av ny båge:

Beräkna ny reducerad kostnad, $\hat{c}_{ij} = c_{ij} + y_i - y_j$ och kontrollera optimalitet.

Tillordningsproblemet

Varje person i skall göra en uppgift och varje uppgift j ska göras en gång.

Variabeldefinition: $x_{ij} = 1$ om person i gör uppgift j.

$$
\begin{array}{llll}
\min & z = & \displaystyle\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij} & \\
\text{då} & & \displaystyle\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = 1 & i = 1, \ldots n \\
& & \displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_{ij} = 1 & j = 1, \ldots n \\
& & x_{ij} \geq 0 & \text{för alla } i, j
\end{array}
$$

Metod: Formulera och lös LP-dualen.

Arbeta med dualvariabler och reducerade kostnader.

Tillordningsproblemet: Lös LP-dualen

$$\begin{array}{llll} \min & z = & \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij} & \\ \text{då} & & \sum_{j=1}^{n} x_{ij} = 1 & i = 1, \dots n \\ & & \sum_{i=1}^{n} x_{ij} = 1 & j = 1, \dots n \\ & & x_{ij} \geq 0 & \text{för alla } i, j \end{array}$$

LP-dual: $\max v = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i + \sum_{j=1}^{n} \beta_j$ då $\alpha_i + \beta_j \leq c_{ij}$ för alla (i, j).

Komplementaritetsvillkor: $x_{ij}(\alpha_i + \beta_j - c_{ij}) = 0$ för alla (i, j).

Metod: Lös dualen: Öka α och β, utan att överskrida duala bivillkoren.

Försök sedan finna en tillåten primallösning som uppfyller komplementaritetsvillkoren. Ändra α och β om det inte går.

Ungerska metoden för tillordningsproblemet

Arbeta med reducerade kostnader:

$$\hat{c}_{ij} = c_{ij} - \alpha_i - \beta_j \text{ för alla } (i, j).$$

Duala bivillkoren (primal optimalitet): $\hat{c}_{ij} \geq 0$ för alla (i, j)

Komplementaritetsvillkoren: $\hat{c}_{ij} x_{ij} = 0$ för alla (i, j)

Optimalitetsvillkor: $\hat{c}_{ij} > 0 \Rightarrow x_{ij} = 0$, $x_{ij} > 0 \Rightarrow \hat{c}_{ij} = 0$

Tillåtna positioner: där $\hat{c}_{ij} = 0$.

Mål: Placera exakt en etta i varje rad och i varje kolumn på de tillåtna positionerna.

Ungerska metoden för tillordningsproblemet

Lös dualen.

- Sätt $\alpha_i = 0$ för alla i och $\beta_j = 0$ för alla j (vilket ger $\hat{c}_{ij} = c_{ij}$).
- Öka enstaka α_i och β_j så mycket som möjligt (utan att $\hat{c}_{ij}$ blir negativt).
- Kan en etta placeras i varje rad och kolumn på de tillåtna positionerna? Om ja, stopp.
- Om inte, ändra dualvariablerna i par:
  Öka α_i och minska β_j så att inget $\hat{c}_{ij}$ blir negativt.

Gör detta så att nya tillåtna positioner, $\hat{c}_{ij} = 0$, bildas,

samtidigt som $\hat{c}_{ij} \geq 0$ för alla i, j.

Upprepa tills tillåten lösning fås.

Ungerska metoden för tillordningsproblemet

Matris av reducerade kostnader, $\hat{C}$.

Stryk alla tillåtna positioner med minsta möjliga antal streck.

Sats

Högsta antalet ettor som kan placeras ut är lika med minsta antalet streck som behövs.

Öka α_i för ostrukna rader, och minska β_j för strukna kolumner.

Effekt: Ostrukna element minskas,
enkelt strukna element oförändrade,
dubbelt strukna element ökas.

$\hat{c}_{ij}$ minskas inte för någon tillåten position.

Inget $\hat{c}_{ij}$ blir negativt.

Minst en ny tillåten position bildas.

Ungerska metoden för tillordningsproblemet

0. Starta med de ursprungliga kostnaderna ($\alpha = 0$, $\beta = 0$).

1. Dra bort det minsta elementet i varje rad från alla elementen i raden (öka α).

2. Dra bort minsta elementet i varje kolumn från alla elementen i kolumnen (öka β).

3. Stryk alla nollor med minsta möjliga antal streck.

Om antalet streck är lika med n, finn tillåten lösning, och sluta.

4. Dra bort minsta ostrukna element från alla ostrukna element och addera till alla dubbelt strukna element. (Öka α_i för ostrukna rader, och minska β_j för strukna kolumner.) Gå till 3.

Ungerska metoden: Exempel

$$\hat{c}_{ij} = c_{ij} - \alpha_i - \beta_j$$

$$\begin{array}{c|cccc|c}
 & & & & & \alpha \\
\hline
 & 0 & 0 & 0 & 1 & 3 \\
 & 1 & 1 & 0 & 0 & 6 \\
 & 0 & 0 & 1 & 0 & 2 \\
 & 0 & 2 & 5 & 1 & 5 \\
\hline
\beta & 0 & 1 & -1 & 1 &
\end{array}$$

Till slut återstår bara en nolla.

Ungerska metoden: Exempel

Optimallösning: $x = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Person 1 gör uppgift 2, person 2 gör uppgift 3, person 3 gör uppgift 4, person 4 gör uppgift 1.

Total kostnad: 17

Duallösning:
$\alpha = (3, 6, 2, 5)$
$\beta = (0, 1, -1, 1)$

Kolla gärna starka dualsatsen: $v = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i + \sum_{j=1}^{n} \beta_j$

Summan av dualvarialerna ska vara lika med totala kostnaden.