Linköpings Tekniska Högskola
Matematiska institutionen/Optimeringslära
Kaj Holmberg

2022–09–02

Laborationsinformation

1 Laboration 3: Ickelinjär optimering

1.1 Förberedelseuppgifter och redovisning

1. Läs `Introduktion` samt `Information om NILEOPT` på sidan
`http://courses.mai.liu.se/GU/optlab-information/`.
2. Tänk igenom hur man kan illustrera KKT-villkoren grafiskt, samt åt vilket håll de olika gradienterna ska ritas.
3. Kontrollera konvexitet för problemen i laborationsuppgift 1 och 2.
4. Rita det tillåtna området till uppgift 2 och fundera på var lokala/globala minima kan finnas.
5. Fundera lite på vilken effekt olika startpunkter kan ha för konvexa/ickekonvexa problem.
6. Fyll i alla efterfrågade uppgifter i resultatbladet under laborationens gång.
7. Laborationen redovisas i Lisam Test. Gör gärna detta medan laborationen görs. Observera möjligheten att kontrollera svaret direkt.

NILEOPT startas genom att öppna ett terminalfönster och sätta sökvägar genom att skriva `module add courses/TAOP88` och sedan skriva `junglebox-dine 3`.

1.2 Laborationsuppgifter

1. Studera problem P1. (Se figurerna i resultatbladet, översiktsfiguren till vänster och det intressanta området uppförstorat till höger.)

$$\begin{array}{llcccc} \min & f(x) = 2(x_1-3)^2 + (x_2-2)^2 - 3x_2 - x_1x_2 & & & & \\ \text{då} & x_1^2 & - & x_2 & \leq & 0 \\ & -x_1 & + & x_2 & \leq & 2 \end{array} \qquad \text{(P1)}$$

   a) Är problemet konvext?
   b) Lös problemet med hjälp av Cobyla (i NILEOPT). Starta i origo. (Målfunktionen kan skrivas som $f(x) = 2x_1^2 + x_2^2 - x_1x_2 - 12x_1 - 7x_2 + 22$.) Ange optimallösningen och rita in den i figuren. Är den erhållna punkten globalt optimum?
   c) Illustrera KKT-villkoren grafiskt i den erhållna punkten i figuren genom att rita in relevanta gradienter. Hur ser man att punkten är (lokalt) optimal?
   d) Ändra det första bivillkoret till $x_1^2 - x_2 \leq 2$, dvs. öka högerledet med två enheter. Lös om problemet och markera den nya optimallösningen i figuren.

e) Lös om problemet för högerledet i första bivillkoret lika med 6, 10 och 16. Markera lösningarna i figuren och skissa kurvan som lösningen följer. Illustrera KKT-villkoren grafiskt i punkterna som erhålles för högerledet 10 respektive 16. (Tänk på vilka bivillkor som är aktiva.)

2. Betrakta problem P2.

$$\begin{array}{llcccl} \min & f(x_1, x_2) = x_1 & & & & \\ \text{då} & (x_1-1)^2 & + & (x_2+2)^2 & \leq & 16 \\ & x_1^2 & + & x_2^2 & \geq & 13 \end{array} \qquad \text{(P2)}$$

a) Är problemet konvext?

b) Försök hitta lokala/globala minima grafiskt i din figur.

c) Lös problemet med Cobyla (i NILEOPT). (Det första bivillkoret kan skrivas som $x_1^2 + x_2^2 - 2x_1 + 4x_2 \leq 11$.) Använd följande startpunkter: $(4, 0)$, $(4, -1)$, $(5, 5)$ och $(-1, -1)$. Ange, för varje startpunkt, erhållen lösning, målfunktionsvärde samt om det är lokalt/globalt minimum.

d) Skissa gradienterna (dvs. illustrera KKT-vilkoren) i de erhållna punkterna.

e) Var hamnar (globalt) optimum om högerledet i det andra bivillkoret är något mindre än 13? (Grafisk motivering med KKT-villkoren räcker.)

Resterande uppgifter ska göras med fördefinierade funktioner i NILEOPT. (Observera att funktionsuttrycket dyker upp i problemfönstret.)

Gör följande för varje funktion: Bedöm om funktionen är konvex. Skriv in erhållna punkter i tabellerna. Markera den punkt du tror är globalt optimum med *. Jämför hur konjugerade gradientmetoder presterar jämfört med brantaste lutningsmetoden. Jämför hur kvasi-Newtonmetoder presterar jämfört med Newtons metod.

3. Läs in **funktion 14 (Booth)**. Starta i punkten (3, 0) och lös med brantaste lutningsmetoden, Newtons metod och Fletcher-Reeves konjugerade gradientmetod. Vad kan man säga om närliggande steg i brantaste lutningsmetoden? Vad kan man säga om konvergensen av Newtons metod (och varför)?

4. Läs in **funktion 2 (Rosenbrock)**, som också kan skrivas $f(x) = 100(x_2 - x_1^2)^2 + (1 - x_1)^2$. Starta i punkten (-1, 2), och lös med brantaste lutningsmetoden, Newtons metod samt kvasi-Newtonmetoden DFP. Zooma in för att studera brantaste lutningsmetodens uppträdande närmare.

5. Läs in **funktion 3 (Cowboyhat)**. Starta i punkten (0, 0) och lös med brantaste lutningsmetoden, Newtons metod, Fletcher-Reeves konjugerade gradientmetod samt kvasi-Newtonmetoden BFGS. (Stanna inte för tidigt.)

6. Läs in **funktion 13 (Himmelblau)**. Lös med Newtons metod, Fletcher-Reeves konjugerade gradientmetod, Hestenes-Stiefels konjugerade gradientmetod och kvasi-Newtonmetoden DFP. Starta i origo. Testa några andra startpunkter för att försöka hitta globalt optimum.

7. Läs in **funktion 10 (Three hump camel back)**. Starta i punkten (3, -3) och lös med brantaste lutningsmetoden, kvasi-Newtonmetoden DFP och Fletcher-Reeves konjugerade gradientmetod. Gör samma sak från startpunkterna (3,3) och (0,4).

8. Läs in **funktion 7 (H-func 4)**. Titta på funktionen och försök se var det finns lokalt minimum, lokalt maximum samt sadelpunkter (dvs. andra punkter med $\nabla f(x) = 0$), och bedöm var globalt minimum finns. Ta hjälp av funktionsuttrycket samt gradient och Hessian. Testa lite med brantaste lutningsmetoden för att bekräfta.