Tekniska Högskolan i Linköping
Matematiska Institutionen
Optimeringslära
Kaj Holmberg

Optimering för ingenjörer
Lösning till tentamen
2011-05-27

Svar och kortfattade lösningar

(Dessa lösningar kan användas för att kontrollera huruvida man har rätt svar. De är dock inte säkert tillräckligt detaljerade för att ge full poäng på tentan.)

Uppgift 1

1a: Starta med slackvariablerna i basen. Först blir x_3 inkommande och x_5 utgående. Därefter fås optimum: Optimum är $x_1 = 0$, $x_2 = 0$, $x_3 = 3/2$, ($x_4 = 1$, $x_5 = 0$, $x_6 = 5/2$) och $z = 6$, och är unikt. Lösning: Gör 1.5 ton av legering 3. Både maskin 1 och 3 har kapacitet över.

1b: Läs av skuggpriserna ur optimaltablån: $y_1 = 0$, $y_2 = 1$, $y_3 = 0$. Detta betyder att vi inte tjänar något på att öka kapaciteten hos maskin 1, och att vinsten ökar med 2000 kr om vi ökar kapaciteten hos maskin 2 med 2.

1c: Vi får $\hat{c}_2 = c_2 - y^T a_2 = 4 - 3 = 1 > 0$. Optimum kommer att förändras. I tablån stod $-\hat{c}_2 = 1$. Ändra detta till $-\hat{c}_2 = -1$ och fortsätt med simplexmetoden. Nu blir x_2 inkommande och x_3 utgående. Därefter fås optimum: Optimum är $x_1 = 0$, $x_2 = 2$, $x_3 = 0$, ($x_4 = 4$, $x_5 = 0$, $x_6 = 4$) och $z = 8$, dvs. gör 2 ton av legering 2.

1d: Frågan är alltså om x_2 och x_5 kan vara i basen samtidigt. Svaret är nej, eftersom dessa kolumner är linjärt beroende ($a_2 = 3a_5$), så en basmatris B med dessa två kolumner skulle inte gå att invertera.

1e: LP-dualen blir:

$$
\begin{array}{llrcrcrcl}
\min & z = & 4y_1 & + & 6y_2 & + & 4y_3 & & \\
\text{då} & & y_1 & + & 3y_2 & + & y_3 & \geq & 2 \\
 & & & & 3y_2 & & & \geq & 2 \\
 & & 2y_1 & + & 4y_2 & + & y_3 & \geq & 4 \\
 & & y_1, & & y_2, & & y_3 & \geq & 0
\end{array}
$$

Dual optimallösning är lika med skuggpriserna: $y_1 = 0$, $y_2 = 1$, $y_3 = 0$.

Komplementaritet: Bara $x_3 > 0$, och duala bivillkor 3 är aktivt. Bara $y_2 > 0$, och primala bivillkor 2 är aktivt.

1f: P0: Första LP-opt: $x_1 = 0$, $x_2 = 0$, $x_3 = 3/2$ och $z = 6$, Detta ger $\bar{z} = 6$.
Förgrena över x_3:
P1 ($x_3 \leq 1$): Eftersom optimum i P0 är unikt, så kommer vi att få $\bar{z} \leq 5$.
P2 ($x_3 \geq 2$): Tillåten lösning saknas. Kapa.
Eftersom den enda återstående möjligheten (P1) innebär att vinsten minskas med minst 1000 kr ska vi inte införa dessa heltalskrav.

Uppgift 2

2a: Först kan man konstatera att problemet är konvext och att $\nabla f(x) = \begin{pmatrix} 2x_1 - 4 - x_2 \\ 4x_2 - 8 - x_1 \end{pmatrix}$.

$x^{(1)} = (0,0)$, $\nabla f(x^{(1)}) = \begin{pmatrix} -4 \\ -8 \end{pmatrix}$, och bara $x_1 \geq 0$ och $x_2 \geq 0$ är aktiva, så vi får följande LP-problem för att bestämma sökriktningen:

$\min z = -4d_1 - 8d_2$ då $0 \leq d_1 \leq 1,\ 0 \leq d_2 \leq 1$

LP-optimum är $d_1 = 1$ och $d_2 = 1$, så vi får $x^{(2)} = (t,t)$ samt $t_{max} = 1$.
Linjesökning skulle ha gett $t = 3$, så vi får $t = 1$, och $x^{(2)} = (1,1)$.

Nu fås $\nabla f(x^{(2)}) = \begin{pmatrix} -3 \\ -5 \end{pmatrix}$, och de två första bivillkoren är aktiva, så vi får följande LP-problem:

$\min z = -3d_1 - 5d_2$ då $d_1 + d_2 \leq 0,\ -1 \leq d_1 \leq 0,\ -1 \leq d_2 \leq 1$

LP-optimum är $d_1 = -1$ och $d_2 = 1$, vilket ger $z = -2$, så vi har inte nått optimum.

2b: $x^{(1)} = (0,0)$, $\bar{z} = f(x^{(1)}) = 0$, $\nabla f(x^{(1)}) = \begin{pmatrix} -4 \\ -8 \end{pmatrix}$, så LP-problemet för att bestämma sökriktningen blir $\min z = -4x_1 - 8x_2$ med hänsyn till alla bivillkor. (Lös grafiskt.)

LP-lösningen blir $x_1 = 0$, $x_2 = 2$, vilket ger $\underline{z} = -16$.

Vi får $x^{(2)} = (0, 2t)$. Linjesökning ger $t = 1$, så $x^{(2)} = (0,2)$ och $\bar{z} = f(x^{(2)}) = -8$.

Nu fås $\nabla f(x^{(2)}) = \begin{pmatrix} -6 \\ 0 \end{pmatrix}$, så LP-problemet blir $\min z = -6x_1$ med hänsyn till alla bivillkor.

LP-lösningen blir $x_1 = 1$, $x_2 = 0$ (eller 1), vilket ger $\underline{z} = -14$. Vi har nu undre gränsen -14 och övre gränsen -8 och är inte framme vid optimum.

2c: Skriv först om bivillkoren som $g_1(x) = x_1 + x_2 - 2 \leq 0$, $g_2(x) = x_1 - 1 \leq 0$, $g_3(x) = -x_1 \leq 0$, $g_4(x) = -x_2 \leq 0$.

KKT-villkoren:
KKT1: $x_1 + x_2 \leq 2$, $x_1 \leq 1$, $x_1 \geq 0$, $x_2 \geq 0$.
KKT2: $u_1(x_1 + x_2 - 2) = 0$, $u_2(x_1 - 1) = 0$, $u_3 x_1 = 0$, $u_4 x_2 = 0$.
KKT3: $\begin{pmatrix} 2x_1 - 4 - x_2 \\ 4x_2 - 8 - x_1 \end{pmatrix} + u_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + u_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + u_3 \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} + u_4 \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$
KKT4: $u \geq 0$.

Kontroll av punkterna: Punkt A: KKT1: OK.
KKT2: $u_3 = 0$, $u_4 = 0$.
KKT3: $\begin{pmatrix} -3 \\ -5 \end{pmatrix} + u_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + u_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$
vilket ger $u_1 = 5$ och $u_2 = -2$. Ej KKT-punkt ty $u_2 < 0$.

Punkt B: KKT1: OK.
KKT2: $u_2 = 0$, $u_3 = 0$, $u_4 = 0$.
KKT3: $\begin{pmatrix} -15/4 \\ -15/4 \end{pmatrix} + u_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$
vilket ger $u_1 = 4/15$. Ja, KKT-punkt ty $u_1 \geq 0$.

Punkt C: KKT1: OK.
KKT2: $u_2 = 0$, $u_4 = 0$.
KKT3: $\begin{pmatrix} -6 \\ 0 \end{pmatrix} + u_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + u_3 \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$
vilket ger $u_1 = 0$ och $u_3 = -6$. Ej KKT-punkt ty $u_3 < 0$.

Eftersom problemet är konvext, är punkt B optimal.

Uppgift 3

3a: Kostnadsmatrisen blir $C = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \\ 4 & 5 & 5 & 7 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \end{pmatrix}$. Lös med ungerska metoden. Vi får $\alpha = (2, 3, 4, 5)$ och $\beta = (0, 1, 2, 3)$ efter första fasen. Därefter är *alla* reducerade kostnader noll, så vi kan ta vilken tillåten lösning som helst, t.ex. $x_{11} = 1$, $x_{22} = 1$, $x_{33} = 1$, $x_{44} = 1$. Problemet är alltså lätt.

3b: Kostnadsmatrisen blir $C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 6 & 8 \\ 3 & 6 & 9 & 12 \\ 4 & 8 & 12 & 16 \end{pmatrix}$. Lös med ungerska metoden. Vi får först $\alpha = (1, 2, 3, 4)$ vilket ger $C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 4 & 6 \\ 0 & 3 & 6 & 9 \\ 0 & 4 & 8 & 12 \end{pmatrix}$. Sedan får vi $\beta = (0, 1, 2, 3)$, vilket ger $C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 4 & 6 \\ 0 & 3 & 6 & 9 \end{pmatrix}$.

Nu kan alla nollor strykas med två streck, rad 1 och kolumn 1. Det ger $\alpha = (1, 3, 4, 5)$ och $\beta = (-1, 1, 2, 3)$, vilket ger $C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & 5 \\ 0 & 2 & 5 & 8 \end{pmatrix}$.

Nu kan alla nollor strykas med tre streck, t.ex. rad 1 och 2 samt kolumn 1. Det ger $\alpha = (1, 3, 5, 6)$ och $\beta = (-2, 1, 2, 3)$, vilket ger $C = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 4 & 7 \end{pmatrix}$.

Nu kan alla nollor strykas med tre streck, rad 1 samt kolumn 1 och 2. Det ger $\alpha =$

$(1,4,6,7)$ och $\beta = (-3,0,2,3)$, vilket ger $C = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 3 & 6 \end{pmatrix}$.

Nu fås lösningen $x_{14} = 1$, $x_{23} = 1$, $x_{32} = 1$, $x_{41} = 1$. Mer arbete än så här kan man knappast få, så detta problem är svårt.

Uppgift 4

4a: Första flödesökande väg: 1 - 2 - 3 - 5 - 4 - 6, kapacitet 8. Skicka. (Båge (3,5) blir full.)

Andra flödesökande väg: 1 - 3 - 2 - 4 - 5 - 6, kapacitet 5. Skicka. (Båge (1,3) blir full. Bågarna (2,3) och (5,4) används baklänges.)

Tredje flödesökande väg: 1 - 2 - 4 - 6, kapacitet 1. Skicka. (Båge (2,4) blir full.)

Detta är maxflöde, 14. Minsnitt går över bågarna (2,4) och (3,5).

4b: Basbågar: (1,2), (2,4), (4,6), (3,5), (5,6). (Inte (1,3) för flödet ligger på övre gränsen.)

Vi får nodpriser $y_1 = 0$, $y_2 = 5$, $y_4 = 11$, $y_6 = 16$, $y_5 = 10$, $y_3 = 3$, samt reducerade kostnader $\hat{c}_{13} = 1 > 0$ (ej optimalt, ty $x_{13} = u_{13}$), $\hat{c}_{23} = 4$ (optimalt, ty $x_{23} = 0$), $\hat{c}_{54} = 1$ (optimalt, ty $x_{54} = 0$).

Detta ger inkommande variabel x_{13} (att minskas). Cykeln blir (1,3) bakåt, (1,2) framåt, (2,4) framåt, (4,6) framåt, (5,6) bakåt och (3,5) bakåt. Utgående variabel blir x_{24} och den tillåtna flödesändringen är 1.

Nu fås nodpriserna $y_1 = 0$, $y_2 = 5$, $y_3 = 4$, $y_5 = 11$, $y_6 = 17$, $y_4 = 12$, samt reducerade kostnader $\hat{c}_{23} = 3$ (optimalt, ty $x_{23} = 0$), $\hat{c}_{24} = -1$ (optimalt, ty $x_{24} = u_{24}$), $\hat{c}_{54} = 1$ (optimalt, ty $x_{54} = 0$). Detta är optimum.

Optimalt flöde är alltså 6 enheter vägen 1 - 2 - 4 - 6 och 4 enheter vägen 1 - 3 - 5 - 6.

4c: Finn billigaste väg från nod 1 med Dijkstras metod. Detta ger nodmärkningar på alla noder. Nysta upp från nod 6, och även från nod 5.

Svar: Väg till nod 6: 1 - 2 - 4 - 6, kostnad 16. Väg till nod 5: 1 - 3 - 5, kostnad 11.

4d: Billigaste uppspännande träd: (1,3), (2,3), (2,4), (4,5), (4,6), kostnad 19.

Billigaste uppspännande träd har ofta högre kostnad än billigaste väg eftersom ett uppspännande träd oftast innehåller fler bågar än en väg. Dock, om man har riktade bågar, kan de tillåtna riktningarna tvinga billigaste väg att använda dyrare bågar, och göra billigaste väg dyrare än billigaste uppspännande träd.