Tekniska Högskolan i Linköping
Matematiska Institutionen
Optimeringslära
Kaj Holmberg

Optimering för ingenjörer
Lösning till tentamen
2011-08-26

Svar och kortfattade lösningar

(Dessa lösningar kan användas för att kontrollera huruvida man har rätt svar. De är dock inte säkert tillräckligt detaljerade för att ge full poäng på tentan.)

Uppgift 1

1a: Starta med slackvariablerna i basen. Först blir x_2 inkommande och x_6 utgående. Sedan blir x_3 inkommande och x_4 utgående. Därefter fås optimum: $x_1 = 0$, $x_2 = 2$, $x_3 = 3/4$, ($x_4 = 0$, $x_5 = 7/2$, $x_6 = 0$) och $z = 13$. Lösning: Gör 2 st Ding 2 och 0.75 st Ding 3 per timme. Aktiva villkor är 1 och 3, dvs. all Stoff A går åt och man gör maximalt av Ding 1 + 2. Däremot är begränsningen för Verunreinigung B inte bindande.

1b: Läs av skuggpriserna ur optimaltablån: $y_1 = 1$, $y_2 = 0$, $y_3 = 4$. Detta betyder att vi tjänar 1 kr per timme om en enhet mer av Stoff A finns tillgängligt, och 4 kr per timme om vi får göra tre enheter av Ding 1 och 2, medan en ökning av den tillåtna mängden Verunreinigung B inte ger något.

1c: $x_5 = 3.5$ i optimallösningen, vilket är slacket i motsvarande bivillkor. Optimallösningen skulle alltså inte ändras om högerledet minskades med 3.5. Eftersom ursprungligt högerled är 3, kan det minska ner till noll. (En negativ övre gräns vore orimlig.) Mixomax kan alltså gå med på att den tillåtna mängden av förorening B minskas till noll.

1d: LP-dualen blir:

$$
\begin{array}{llrcrcrcl}
\min & v = & 5y_1 & + & 3y_2 & + & 2y_3 & & \\
\text{då} & & 3y_1 & + & 2y_2 & + & y_3 & \geq & 2 \\
& & y_1 & - & y_2 & + & y_3 & \geq & 5 \\
& & 4y_1 & + & 2y_2 & & & \geq & 4 \\
& & y_1, & & y_2, & & y_3 & \geq & 0
\end{array}
$$

Dual optimallösning är lika med skuggpriserna: $y_1 = 1$, $y_2 = 0$, $y_3 = 4$.

Komplementaritet: $x_2 > 0$, och duala bivillkor 2 är aktivt. $x_3 > 0$, och duala bivillkor 3 är aktivt. $y_1 > 0$, och primala bivillkor 1 är aktivt. $y_3 > 0$, och primala bivillkor 3 är aktivt.

1e: P0: Första LP-opt: $x_1 = 0$, $x_2 = 2$, $x_3 = 3/4$ och $z = 13$, Detta ger $\bar{z} = 13$.
Förgrena över x_3:
P2 ($x_3 \geq 1$): $x_3 = 1$. Grafisk lösning av problemet i x_1 och x_2 ger lösningen $x_1 = 0$ och $x_2 = 1$, med $z = 9$. Detta är heltal, så $\underline{z} = 9$. Kapa.
P1 ($x_3 \leq 0$): $x_3 = 0$. Grafisk lösning av problemet i x_1 och x_2 ger lösningen $x_1 = 0$ och $x_2 = 2$, med $z = 10$. Detta är heltal, så $\underline{z} = 10$. Kapa.

Alla grenar är avsökta, så optimum blir $x_1 = 0$, $x_2 = 2$ och $x_3 = 0$, med $z = 10$. Detta krav kostar alltså Mixomax 3 kr per timme.

Uppgift 2

2a: Först kan man konstatera att problemet är konvext eftersom bivillkoren är linjära och $f(x)$ är konvex. (Visserligen är Hessianen singulär, vilket betyder att ett egenvärde är noll, men det andra egenvärdet är positivt.) Vi har $\nabla f(x) = \begin{pmatrix} 2x_1 - 2 - 2x_2 \\ 2x_2 - 1 - 2x_1 \end{pmatrix}$. (Man kan notera att $\nabla f(x) = 0$ saknar lösning.)

Vi ser grafiskt att det tillåtna området har följande extrempunkter: A: $(0,0)$, B: $(3,0)$ och C: $(0,6)$.

Skriv bivillkoren som $g_1(x) = 2x_1 + x_2 - 6 \leq 0$, $g_2(x) = -x_1 \leq 0$, $g_3(x) = -x_2 \leq 0$.

KKT-villkoren:
KKT1: $2x_1 + x_2 \leq 6$, $x_1 \geq 0$, $x_2 \geq 0$.
KKT2: $u_1(2x_1 + x_2 - 6) = 0$, $u_2 x_1 = 0$, $u_3 x_2 = 0$.
KKT3: $\begin{pmatrix} 2x_1 - 2 - 2x_2 \\ 2x_2 - 1 - 2x_1 \end{pmatrix} + u_1 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + u_2 \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} + u_3 \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$
KKT4: $u \geq 0$.

Kontroll av punkterna: Punkt A: KKT1: OK. KKT2: $u_1 = 0$.
KKT3: $\begin{pmatrix} -2 \\ -1 \end{pmatrix} + u_2 \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} + u_3 \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$
vilket ger $u_2 = -2$ och $u_2 = -1$. Ej KKT-punkt ty $u_1 < 0$ och $u_2 < 0$.

Punkt B: KKT1: OK. KKT2: $u_2 = 0$.
KKT3: $\begin{pmatrix} 4 \\ -7 \end{pmatrix} + u_1 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + u_3 \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$
vilket ger $u_1 = -2$ och $u_3 = -9$. Ej KKT-punkt ty $u_1 < 0$ och $u_3 < 0$.

Punkt C: KKT1: OK. KKT2: $u_3 = 0$.
KKT3: $\begin{pmatrix} -14 \\ 11 \end{pmatrix} + u_1 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + u_2 \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$
vilket ger $u_1 = -11$ och $u_2 = -36$. Ej KKT-punkt ty $u_1 < 0$ och $u_3 < 0$.

Ingen av dessa punkter är alltså optimal.

2b: Förutsättningen ger $u_2 = 0$ och $u_3 = 0$. Kvar av KKT-villkoren blir då:
KKT1: $2x_1 + x_2 \leq 6$. (Givet $x_1 > 0$, $x_2 > 0$.)
KKT2: $u_1(2x_1 + x_2 - 6) = 0$.
KKT3: $\begin{pmatrix} 2x_1 - 2 - 2x_2 \\ 2x_2 - 1 - 2x_1 \end{pmatrix} + u_1 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$
KKT4: $u_1 \geq 0$.

Addition av de två ekvationerna i KKT3 ger $u_1 = 1$. Insättning av detta ger två ekvationer som båda säger $x_1 = x_2$. Eftersom $u_1 > 0$ ger KKT2 att $2x_1 + x_2 = 6$, vilket nu ger $x_1 = x_2 = 2$. Nu är alla KKT-villkor uppfyllda, och eftersom problemet är konvext, är detta optimum: $x_1 = 2$, $x_2 = 2$.

2c: $x^{(1)} = (0,0)$, $\nabla f(x^{(1)}) = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \end{pmatrix}$, och bara $x_1 \geq 0$ och $x_2 \geq 0$ är aktiva, så vi får följande LP-problem för att bestämma sökriktningen:

$\min z = -2d_1 - d_2$ då $0 \leq d_1 \leq 1,\ 0 \leq d_2 \leq 1$

LP-optimum är $d_1 = 1$ och $d_2 = 1$, så vi får $x^{(2)} = (t,t)$ samt $t_{max} = 2$.
I denna riktning minskar $f(x)$ linjärt, och linjesökning skulle ha gett ett oändligt stort t, så vi får $t = 2$, och $x^{(2)} = (2,2)$.

Nu fås $\nabla f(x^{(2)}) = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \end{pmatrix}$, och bara det första bivillkoret är aktivt, så vi får följande LP-problem:

$\min z = -2d_1 - d_2$ då $2d_1 + d_2 \leq 0,\ -1 \leq d_1 \leq 0,\ -1 \leq d_2 \leq 1$

Första bivillkoret ger omedelbart $z \geq 0$, så vi har nått optimum. (LP-optimum är t.ex. $d_1 = 1/2$ och $d_2 = -1$, vilket ger $z = 0$.)

Uppgift 3

3a: Det är ett billigaste uppspännande träd-problem som kan lösas med Kruskals (eller Prims) metod. Trädet blir (1,3), (1,4), (2,4), (4,6), (5,6), kostnad 18.

3b: Vi söker nu den billigaste vägen från brandstationsnoden till alla andra noder. Som tur är ger Dijkstras metod detta. (Det är en smaksak om man ersätter oriktade bågar med två motriktade bågar, eller beaktar båda riktningarna för varje båge i algoritmen.) Lösningen kallas billigaste vägträd.

Billigaste vägträdet från nod 4 är ganska ospännande, nämligen direktbågarna från nod 4 till varje annan nod. Summan av vägkostnaderna blir 21.

Billigaste vägträdet från nod 3 består av direktbågarna från nod 3 till nod 1, 4 och 6, samt vägen 3 - 4 - 2 till nod 2 och 3 - 4 - 5 (eller 3 - 6 - 5) till nod 5. Vägkostnaderna till resp. nod blir 3, 4, 6, 9 och 9, så summan av vägkostnaderna blir 31. Man förlorar alltså totalt 10 minuter på detta. (Observera skillnaden mot MST, de bågar som ingår i flera vägar räknas flera gånger.)

3c: Detta ger standardproblemet (okapaciterade) lokaliseringsproblemet, se kurslitteraturen, med αt_{ij} som transportkostnader.

3d: Nu blir det handelsresandeproblemet. Billigaste 1-träd blir bågarna (1,3), (1,4), (2,5), (3,4), (3,6), (5,6), med kostnaden 25. Detta ger alltid en undre gräns till det optimala målfunktionsvärdet. I detta fall fås inte en giltig tur. (Dock fås en ganska bra tur genom att byta ut (3,4) mot den aningen dyrare (2,4), vilket ger övre gränsen 26.)

Uppgift 4

4a: Alla bågar vars flöde inte ligger på undre eller övre gränsen måste vara basbågar, och dessa bågar ska ge ett uppspännande träd. I detta fall får man för många bågar, så det är inte en baslösning. Observera speciellt cykeln 2 - 6 - 4. (En baslösning får aldrig innehålla en cykel.)

4b: Kör maxflödesmetoden. En flödesökande väg: 3 - 1 - 2 - 4 - 6, kapacitet 1. Skicka. (Samtliga bågar längs vägen blir därefter fulla, eller tomma. Många olika minsnitt bevisar då maxflöde.)

4c: Man kan inte använda simplexmetoden i nätverk, eftersom man inte har en baslösning. Cykeln som "förstör", 2 - 6 - 4, har dock en positiv kostnad, så genom att ta bort en enhets flöde i denna fås ett billigare flöde. Alltså, skicka en enhet vägen 2 - 4 - 6 - 2. Totalflödet från nod 3 till nod 5 är oförändrat och kostnaden har minskats med 4.