Tekniska Högskolan i Linköping
Matematiska Institutionen
Optimeringslära
Kaj Holmberg

Optimering för ingenjörer
Lösning till tentamen
2012-01-11

Svar och kortfattade lösningar

(Dessa lösningar kan användas för att kontrollera huruvida man har rätt svar. De är dock inte säkert tillräckligt detaljerade för att ge full poäng på tentan.)

Uppgift 1

1a: Variabeldefinition: x_1: antal tomtar i en påse, x_2: antal renar i en påse, x_3: antal julgranar i en påse.

Modell:

$$
\begin{array}{lllllllll}
\max & z = & 4x_1 & + & x_2 & + & 2x_3 & & \\
\text{då} & & 2x_1 & + & x_2 & & & \leq & 5 & (1) \\
& & & & x_2 & + & x_3 & \leq & 3 & (2) \\
& & x_1 & + & x_2 & + & x_3 & \leq & 4 & (3) \\
& & x_1, & & x_2, & & x_3 & \geq & 0 &
\end{array}
$$

1b: Starta med slackvariablerna i basen. Först blir x_1 inkommande och x_4 utgående. Sedan blir x_3 inkommande och x_6 utgående. Därefter fås optimum: $x_1 = 2.5$, $x_2 = 0$, $x_3 = 1.5$, ($x_4 = 0$, $x_5 = 1.5$, $x_6 = 0$) och $z = 13$. Lösning: Stoppa i 2.5 tomtar och 1.5 julgran i en påse, vilket ger vinsten 13 kr per påse. Alla lydioder går åt och påsen blir full, men det blir ljudchip över.

1c: Läs av skuggpriserna ur optimaltablån: $y_1 = 1$, $y_2 = 0$, $y_3 = 2$. Att öka påsens storlek verkar vara bäst, att skaffa fler ljudchips sämst.

1d: Addera 1 till målfunktionskoefficienterna för x_1, x_2 ch x_3 i optimaltablån. x_2 är ickebasvariabel, så det gör ingen skillnad. För x_1 och x_3 måste dessa ettor elimineras med radoperationer. Detta ger dock fortfarande icke-positiva reducerade kostnader, så baslösningen är fortfarande optimal. Dock minskar vinsten till 9 kr.

1e: Reducerad kostnad: $\hat{c}_7 = c_7 + a_7^T y = 1 - 2 = -1 < 0$, så nej, denna variabel ger ingen förbättring, och bör förbli noll.

1f: P0: Första LP-opt: $x_1 = 2.5$, $x_2 = 0$, $x_3 = 1.5$ och $z = 13$, Detta ger $\bar{z} = 13$.
Förgrena över x_1:
P2 ($x_1 \geq 3$): Saknar tillåten lösning.
P1 ($x_1 \leq 2$): Sätt $x_1 = 2$. Grafisk lösning av problemet i x_2 och x_3 ger lösningen $x_2 = 0$ och $x_3 = 2$, med $z = 12$. Detta är heltal, så $\underline{z} = 12$. Kapa.
Alla grenar är avsökta, så optimum blir $x_1 = 2$, $x_2 = 0$ och $x_3 = 2$, med $z = 12$. Detta krav kostar alltså Tomtapå 1 kr per timme.

Uppgift 2

2a: Modell:
$\min f(x) = 2x_1 + 3x_2$ då $0 \leq x_1 \leq 3$, $0 \leq x_2 \leq 4$

Uppenbarligen har detta problem origo, $x_1 = 0$, $x_2 = 0$, som optimallösning, dvs. man tillsätter inget av dessa kryddor.

2b: Modell:
$\min f(x) = 2(x_1 - 2)^2 + (x_2 - 2)^2 - x_1 x_2$ då $0 \leq x_1 \leq 3$, $0 \leq x_2 \leq 4$

Först kan man konstatera att problemet är konvext eftersom bivillkoren är linjära och $f(x)$ är konvex. Vi har $\nabla f(x) = \begin{pmatrix} 4x_1 - 8 - x_2 \\ 2x_2 - 4 - x_1 \end{pmatrix}$.

$x^{(1)} = (0, 0)$, $\nabla f(x^{(1)}) = \begin{pmatrix} -8 \\ -4 \end{pmatrix}$, och bara $x_1 \geq 0$ och $x_2 \geq 0$ är aktiva, så vi får följande LP-problem för att bestämma sökriktningen:

$\min z = -8d_1 - 4d_2$ då $0 \leq d_1 \leq 1,\ 0 \leq d_2 \leq 1$

LP-optimum är $d_1 = 1$ och $d_2 = 1$, så vi får $x^{(2)} = (t, t)$ samt $t_{max} = 3$.
Linjesökning ger $t = 3$, och $x^{(2)} = (3, 3)$.

Nu fås $\nabla f(x^{(2)}) = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$, och bara bivillkoret $x_1 \leq 3$ är aktivt, så vi får följande LP-problem:

$\min z = d_1 - d_2$ då $-1 \leq d_1 \leq 0,\ -1 \leq d_2 \leq 1$

LP-optimum är $d_1 = -1$ och $d_2 = 1$, så vi får $x^{(3)} = (3 - t, 3 + t)$ samt $t_{max} = 1$.
Linjesökning ger $t = 1/4$, och $x^{(3)} = (2.75, 3.25)$.

2c: $\nabla f(x) = 0$ ger den enda punkten $x_1 = 20/7$, $x_2 = 24/7$. Eftersom funktionen är konvex, är detta ett globalt minimum, och punkten är faktiskt tillåten, så det är optimum.

2d: Funktionen $f(x) = 2(x_1 - 2)^2 + (x_2 - 2)^2$ är additivt separabel i x_1 och x_2, och eftersom bivillkoren också är det, kan hela problemet delas upp i två en-dimensionella:
$\min f_1(x_1) = 2(x_1 - 2)^2$ då $0 \leq x_1 \leq 3$
$\min f_2(x_2) = (x_2 - 2)^2$ då $0 \leq x_2 \leq 4$.

Det är nu trivialt att inse att $x_1 = 2$ och $x_2 = 2$ är optimalt.

2e: Problemet är nu
$\min f(x) = 2(x_1 - 2)^2 + (x_2 - 2)^2 - x_1 x_2$ då $0 \leq x_1 \leq 3$, $0 \leq x_2 \leq 2$

Första delen av lösningen i uppgift b gav $d_1 = 1$ och $d_2 = 1$ och $x^{(2)} = (t, t)$, men nu blir $t_{max} = 2$. Linjesökning ger då $t = 2$, och $x^{(2)} = (2, 2)$.

Nu fås $\nabla f(x^{(2)}) = \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \end{pmatrix}$, och bara bivillkoret $x_2 \leq 2$ är aktivt, så vi får följande LP-problem:

$\min z = -2d_1 - 2d_2$ då $-1 \leq d_1 \leq 1,\ -1 \leq d_2 \leq 0$

LP-optimum är $d_1 = 1$ och $d_2 = 0$, så vi får $x^{(3)} = (2 + t, 2)$ samt $t_{max} = 1$. Linjesökning ger $t = 1/2$, och $x^{(3)} = (2.5, 2)$.

Nu fås $\nabla f(x^{(3)}) = \begin{pmatrix} 0 \\ -2.5 \end{pmatrix}$, och bara bivillkoret $x_2 \leq 2$ är aktivt, så vi får följande LP-problem:

$\min z = -2.5d_2$ då $-1 \leq d_1 \leq 1,\ -1 \leq d_2 \leq 0$

LP-optimum är $d_1 = 0$ och $d_2 = 0$, dvs. $z = 0$, så vi har nått optimum.

2f: Skriv bivillkoren som $g_1(x) = x_1 - 3 \leq 0$, $g_2(x) = x_2 - 2 \leq 0$, $g_3(x) = -x_1 \leq 0$, $g_4(x) = -x_2 \leq 0$.

KKT-villkoren:
KKT1: $0 \leq x_1 \leq 3$, $0 \leq x_2 \leq 2$.
KKT2: $u_1(x_1 - 3) = 0$, $u_2(x_2 - 2) = 0$, $u_3 x_1 = 0$, $u_2 x_2 = 0$.
KKT3: $\begin{pmatrix} 4x_1 - 8 - x_2 \\ 2x_2 - 4 - x_1 \end{pmatrix} + u_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + u_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + u_3 \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} + u_4 \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$
KKT4: $u \geq 0$.

Kontroll av punkten $(2.5, 2)$: Punkt A: KKT1: OK.
KKT2: $u_1 = 0$, $u_3 = 0$, $u_4 = 0$.
KKT3: $\begin{pmatrix} 0 \\ -2.5 \end{pmatrix} + u_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$
vilket ger $u_2 = 2.5 > 0$. Ja, det är en KKT-punkt, och optimum, ty probleet är konvext.

Uppgift 3

3a: Handelsresandeproblem, *NP*-svårt.

Bågarna som ansluter till noderna 4, 5, 6 och 7 måste vara med (för dessa noder har valens två). Detta gör att noderna 1, 2 och 3 redan har valens två, så resterande bågar får ej vara med. Nu är lösningen helt fixerad, och kostar 45.

2b: Ett billigaste uppspännande träd fås med Kruskals (eller Prims) metod. Trädet blir (1,2), (1,7), (2,3), (2,4), (2,5) och (6,7), med kostnad 29. Optimala målfunktionsvärdet ligger alltså mellan 29 och 45.

Billigaste 1-träd blir (1,2), (1,3), (2,3), (2,4), (2,5), (3,6) och (6,7), med kostnad 36. Optimala målfunktionsvärdet ligger alltså mellan 36 och 45.

Uppgift 4

4a: Använd Dijkstras metod, med nod 1 som startnod. Detta ger nodmärkningar för alla noder, och man kan nysta upp baklänges från valfri nod.

4b: Sätt kapacitet 1 på all bågar och finna maxflöde från nod 1 till nod 2. Första flödesökande väg: 1 - 2, kapacitet 1. Skicka, ändra tillåten riktning på båge (1,2). Andra flödesökande väg: 1 - 7 - 6 - 3 - 2, kapacitet 1. Skicka, ändra tillåtna riktningar. Nu saknas flödesökande väg från nod 1. (Minsnittet går runt nod 1.) Alltså finns två olika vägar.

4c: Detta är ett minkostnadsflödesproblem med stora kapaciteter (t.ex. 100). Alla bågar med positivt flöde blir då basbågar. Dessutom behövs en till nod 3, ta t.ex. båge (2,3). Detta ger nodpriserna $y_1 = 0$, $y_2 = 4$, $y_3 = 7$, $y_4 = 16$, $y_5 = 9$, $y_6 = 12$, $y_7 = 7$. En snabb koll av reducerade kostnader visar att denna lösning är optimal i den givna grafen. För vända oanvända bågar gäller följande (vi kan bortse från (2,1), eftersom (1,2) redan finns, och från (2,3) eftersom den är basbåge):
(1,3): $\hat{c}_{13} = 5 + 0 - 7 = -2 < 0$, en möjlig kandidat.
(1,5): $\hat{c}_{15} = 6 + 0 - 9 = -3 < 0$, en möjlig kandidat.
(2,4): $\hat{c}_{24} = 5 + 4 - 16 = -7 < 0$, en bra kandidat.
(3,2): $\hat{c}_{32} = 3 + 7 - 4 = 6 > 0$, inte en kandidat.
(3,4): $\hat{c}_{34} = 6 + 7 - 16 = -3 < 0$, en möjlig kandidat.
(3,6): $\hat{c}_{36} = 11 + 7 - 12 = 6 > 0$, inte en möjlig kandidat.

Nästan alla ger förbättring, men vi väljer (2,4) eftersom den har mest negativ reducerad kostnad.

(Om man skulle fortsätta lösa problemet, skulle man skicka runt 3 enheter i cykeln 2 - 4 - 5 - 2, och sänka kostnaderna med 21.)