Tekniska Högskolan i Linköping
Matematiska Institutionen
Optimeringslära
Kaj Holmberg

Optimering för ingenjörer
Lösning till tentamen
2012-06-02

Svar och kortfattade lösningar

(Dessa lösningar kan användas för att kontrollera huruvida man har rätt svar. De är dock inte säkert tillräckligt detaljerade för att ge full poäng på tentan.)

Uppgift 1

1a: P0: Första LP-opt: $x_1 = 2.5$, $x_2 = 5/6 = 0.83$ och $z = 250/3 = 83.3$. Detta ger $\bar{z} = 83$.
Förgrena över x_1: Skapa P1 = P0 + ($x_1 \leq 2$), och P2 = P0 + ($x_1 \geq 3$).
Lös P1 ($x_1 \leq 2$): Grafisk lösning ger $x_1 = 2$ och $x_2 = 4/3 = 1.33$ med $z = 73.3$. Detta ger $\bar{z} = 73$.
Förgrena över x_2: Skapa P3 = P1 + ($x_2 \leq 1$), och P4 = P1 + ($x_2 \geq 2$).
Lös P3 ($x_1 \leq 2, x_2 \leq 1$): Grafisk lösning ger $x_1 = 2$ och $x_2 = 1$ med $z = 70$. Detta är heltal, så $\underline{z} = 70$. Kapa.
Lös P4 ($x_1 \leq 2, x_2 \geq 2$): Grafisk lösning ger $x_1 = 1.33$ och $x_2 = 2$ med $z = 60$. För dålig. Kapa.
Lös P2 ($x_1 \geq 3$): Saknar tillåten lösning. Kapa.
Alla grenar är avsökta, så optimum blir $x_1 = 2$ och $x_2 = 1$. Svar: Gör två ljusstakar och ett stolsben per timme, vilket ger 70 kr i vinst.

1b: $2x_1 \leq 5$ betyder $x_1 \leq 2.5$ vilket betyder $x_1 \leq 2$ om x_1 måste vara heltal.
$3x_2 \leq 8$ betyder $x_2 \leq 2.67$ vilket betyder $x_2 \leq 2$ om x_2 måste vara heltal.
På samma sätt kan $x_1 + x_2 \leq 3.33$ skärpas till $x_1 + x_2 \leq 3$.
Grafiskt kan man se att om man tillför dessa två bivillkor fås det konvexa höljet av de tillåtna heltalspunkterna, och alla extrempunkter är heltaliga. Om man använder Land-Doig-Dakins metod, så kommer den första lösningen att vara heltalig, så man behöver inte göra någon förgrening alls.

1c: $x_1 \leq My_1$, $x_2 \leq My_2$, $y_1 + y_2 \leq 1$, $y_1 \in \{0,1\}$, $y_2 \in \{0,1\}$.
Här räcker det med $M = 3$. Man kan även eliminera $y_2 = 1 - y_1$ om man vill.

1d: Alla målfunktionsvärden divideras med 10. Skillnaden uppstår när man avrundar.
P0: $\bar{z} = 8$. P1: $\bar{z} = 7$. P3: $\underline{z} = 7$. P4 behöver därför inte lösas.
Så det blev lite lättare att lösa problemet.

Uppgift 2

2a: Starta med slackvariablerna i basen. Först blir x_1 inkommande och x_3 utgående. Därefter blir x_2 inkommande och x_4 utgående. Sedan fås optimum: $x_1 = 2.5$, $x_2 = 5/6 = 0.83$, $x_3 = 0$, $x_4 = 0$, $x_5 = 5.5$ och $z = 250/3 = 83.3$. Lösning: Gör 2.5 ljusstakar och 0.83 bordsben vilket ger vinsten 83.3 kr per timme. Det första och andra bivillkoret är aktiva, dvs. borrtid och svarvtid begränsar lösningen.

2b: Läs av skuggpriserna ur optimaltablån: $y_1 = 10$, $y_3 = 0$. Vi skulle tjäna 10 kr på ett borrhål till, men inget på en skruv till.

2c: (Standard.)

2d: Ny variabel, x_6. $\hat{c}_6 = c_6 - a_6^T y = 17 - 15 = 2 > 0$, så ja, det verkar löna sig.

Uppgift 3

3a: Gradienten i startpunkten blir $(-6, -10)$, aktiva bivillkor är (4) och (5), och LP-problemet får lösningen $d = (1, 1)$. Maximal steglängd blir 1.5, och linjesökningen ger en steglängd som är större än så, så vi sätter $t = 1.5$ och får $x^{(2)} = (1.5, 1.5)$. Aktivt bivillkor är nu (2). Gradienten blir $(-1.5, -2.5)$, LP-problemet ger $d = (-1, 1)$ och linjesökningen ger steglängden 0.25, vilket är tillåtet. Vi får nu $x^{(3)} = (1.25, 1.75)$. Aktivt bivillkor är fortfarande (2). Gradienten blir $(-1.75, -1.75)$. LP-problemet ger optimala målfunktionsvärdet noll, så detta är optimum.

3b: Lös $\nabla f(x) = 0$, vilket ger $x_1 = 2$ och $x_2 = 2$ som den enda stationära punkten. Hessianen är positivt definit, så $f(x)$ är strikt konvex. Denna punkt är alltså globalt minimum. Punkten är dock ej tillåten.

3c: (Detaljer utelämnas.) Punkten $x_1 = 2.5$, $x_2 = 0.5$ ger $u_1 = -2.5$, $u_2 = 5.5$, $u_3 = 0$, så den är ej en KKT-punkt.

För punkten $x_1 = 2$, $x_2 = 1$ ger KKT2 $u_1 = 0$, $u_3 = 0$, men det finns inget värde på u_2 som uppfyller KKT3, så den är ej en KKT-punkt.

Punkten $x_1 = 2$, $x_2 = 2$ är ej tillåten, så den är ej en KKT-punkt.

För punkten $x_1 = 1$, $x_2 = 1$ ger KKT2 $u_1 = 0$, $u_2 = 0$, $u_3 = 0$, men det finns ingen lösning till KKT3, så den är ej en KKT-punkt.

Ingen av dessa punkter är optimal.

Uppgift 4

4a: Finn billigaste väg från nod 1 med Dijkstras metod. Detta ger nodmärkningar på alla noder. Nysta upp från nod 6 och nod 3. Väg: 1 - 2 - 3, kostnad 21. Väg: 1 - 4 - 6, kostnad 20.

4b: $\hat{c}_{26} = c_{26} + y_2 - y_6 = c_{26} + 10 - 20 = c_{26} - 10 < 0$ om $c_{26} < 10$.

Uppgift 5

5a: Basbågar: (1,2), (1,5), (2,3), (4,5), (5,6). Detta ger nodpriserna $y_1 = 0$, $y_2 = 10$, $y_3 = 18$, $y_4 = 4$, $y_5 = 11$, $y_6 = 20$, och följande reducerade kostnader: $\hat{c}_{14} = 2$ (minska), $\hat{c}_{36} = 2$ (minska), $\hat{c}_{46} = 2$ (optimalt), $\hat{c}_{53} = 5$ (optimalt).

Jag väljer x_{36} som inkommande variabel (att minska). Cykeln blir 6-3-2-1-5-6, och utgående variable blir x_{56}. Ändringen blir 1 enhet. Beräkning av nya nodpriser och nya reducerade kostnader visar att lösningen inte är optimal.

5b: Maximal flödesökande väg blir 1-5-4-6. Skicka 2 enheter. Sedan blir det maxflöde. Ett icke-minsnitt är t.ex. (2,3), (5,3), (5,6), (4,6).

Uppgift 6

6a: Kruskals eller Prims metod. Kostnad 42.

6b: Kostnad 52.

6c: Närmaste granne ger kostnad 59.

6d: $52 \leq z^* \leq 59$.

6e: Kinesiska brevbärarproblemet. Noderna 1, 3, 4 och 6 har udda valens. Billigaste komplettering av grafen är (1,4) och (3,6). Finn en Eulercykel i denna graf där alla noder nu har jämn valens. Kostnad 103.