

Svar och kortfattade lösningar

*(Dessa lösningar kan användas för att kontrollera huruvida man har rätt svar.
De är dock inte säkert tillräckligt detaljerade för att ge full poäng på tentan.)*

Uppgift 1

1a: Starta med slackvariablerna i basen. Först blir x_1 inkommande och x_5 utgående. Därefter fås optimum: $x_1 = 1$, $x_2 = 0$, $x_3 = 0$, $x_4 = 2$, $x_5 = 0$ och $z = -3$. Lösning: Gör en enhet av produkt 1 (Ståhlberg har rätt), vilket ger kostnaden -3 (dvs. vinsten 3). Det andra bivillkoret är aktivt.

2b: Läs av duallösningen ur optimaltablan: $y_1 = 0$, $y_2 = -3/4 = -0.75$. (Resten är standard.)

2c: Ny lösning: $x_1 = 5/4$, $x_2 = 0$, $x_3 = 0$, $x_4 = 3/2$, $x_5 = 0$ och $z = -15/4 = -3.75$.

2d: P0: Första LP-opt: $x_1 = 5/4 = 1.25$, $x_2 = 0$, $x_3 = 0$ och $z = -3.75$. Detta ger $z = -3$.

Förgrena över x_1 : Skapa P1 = P0 + ($x_1 \leq 1$), och P2 = P0 + ($x_1 \geq 2$).

Lös P1 ($x_1 \leq 1$): Grafisk lösning ger $x_1 = 1$, $x_2 = 0$ och $x_3 = 1/3 = 0.33$ med $z = -3.33$.

Förgrena över x_3 : Skapa P3 = P1 + ($x_3 \leq 0$), och P4 = P1 + ($x_3 \geq 1$).

Lös P3 ($x_1 \leq 1, x_3 \leq 0$): Grafisk lösning ger $x_1 = 1$, $x_2 = 0$ och $x_3 = 0$ med $z = -3$. Detta är heltal, så $\bar{z} = -3$. Kapa.

Både P4 och P2 har ärvt $z = -3$ från P0, så båda kan kapas.

Alla grenar är avsökta, så optimum blir $x_1 = 1$, $x_2 = 0$ och $x_3 = 0$.

Uppgift 2

2a: Problemet är *inte* konvext. (Målfunktionen är faktiskt konkv.)

2b: (Detaljer utelämnas.) Punkten $x_1 = 0$, $x_3 = 0$ ger $u_1 = 0$, $u_2 = 0$, $u_3 = -3$, $u_4 = -1$, så den är ej en KKT-punkt.

För punkten $x_1 = 1$, $x_3 = 0$ fås $u_1 = 0$, $u_2 = 7/4$, $u_3 = 0$, $u_4 = 13/4$, så den är en KKT-punkt.

Punkten $x_1 = 0$, $x_2 = 4/3$ ger $u_1 = 0$, $u_2 = 11/9$, $u_3 = 5/9$, $u_4 = 0$, så den är en KKT-punkt.

De två senare punkterna är lokala minima, och den bästa av dem, $x_1 = 1$, $x_3 = 0$, är optimal. (Det krävs dock lite mer undersökning för att vara säker på det.)

2c: Gradienten i startpunkten blir $(-3, -1)$, aktiva bivillkor är $x \geq 0$, och LP-problemet får lösningen $d = (1, 1)$. Maximal steglängd blir $4/7$, och linjesökningen

ger att t ska vara så stor som möjligt, så vi sätter $t = 4/7$ och får $x^{(2)} = (4/7, 4/7)$. Detta är inte optimum.

Uppgift 3

3a: Billigaste uppspännande träd. Lös med Kruskals eller Prims metod. Kostnad 20. (Det spelar ingen roll att det finns negativ bågkostnad.)

3b: Handelsresandeproblemet. Närmaste granne går inte så bra (grafan är inte fullständig). Andra heuristiker kan ge en tur med kostnad 46. Billigaste 1-träd kostar 28, så vi får $28 \leq z^* \leq 46$.

Uppgift 4

4a: Kolla först att lösningen är tillåten, både avseende nodjämviktsvillkor och båggränser. Bestäm sedan vilka bågar som är basbågar. Man måste ta med alla som har $l_{ij} < x_{ij} < u_{ij}$, plus eventuellt flera så att man får ett uppspännande träd. Eftersom man kan få ett uppspännande träd på detta sätt, är det en baslösning.

4b: Basbågar: (1,4), (4,2), (2,5), (1,3). Detta ger nodpriserna $y_1 = 0$, $y_4 = 8$, $y_2 = 1$, $y_3 = 3$, $y_5 = 11$, och följande reducerade kostnader: $\hat{c}_{12} = 10$ (optimalt), $\hat{c}_{32} = 5$ (optimalt), $\hat{c}_{35} = 2$ (optimalt), $\hat{c}_{45} = 6$ (minska).

Detta ger x_{45} som inkommande variabel (att minska). Cykeln blir 5-4-2-5, ändringen blir 2 enheter, och utgående variabel blir vilken som helst i den cykeln. Jag är smart och väljer x_{45} (för då ändras inga nodpriser och inga reducerade kostnader). Man ser då direkt att lösningen är optimal.

4c: $\hat{c}_{35} = c_{35} + y_3 - y_5 = c_{35} + 3 - 11 = c_{35} - 8 < 0$ om $c_{35} < 8$.

Uppgift 5

Använd Fords metod, ty negativ bågkostnad gör att Dijkstras metod ej fungerar. Väg: 1 - 4 - 6 - 5 - 7, kostnad 18.

Uppgift 6

Maximal flödesökande väg blir 1-3-2-4-5-6, med kapacitet 7. Skicka 7 enheter. Nästa maximala flödesökande väg blir 1-2-3-5-4-6, med kapacitet 5. Skicka 5 enheter. Sedan blir det maxflöde. Ett minsnitt är t.ex. (4,6), (5,6).

Uppgift 7

7a: LP-dualen blir $\min 19y$ då $10y \geq 6$, $9y \geq 3$, $7y \geq 7$, $7y \geq 5$, $y \geq 0$.

Uppenbarligen är $y = 1$ tillåten och optimal.

7b: Endast tredje duala bivillkoret är aktivt, så komplementaritet ger $x_1 = 0$, $x_2 = 0$, $x_4 = 0$. Eftersom $y > 0$, krävs likhet i primala bivillkoret, så vi får $7x_3 = 19$, vilket ger $x_3 = 19/7$.