Tekniska Högskolan i Linköping
Matematiska Institutionen
Optimeringslära
Kaj Holmberg

Optimering för ingenjörer
Lösning till tentamen
2012-10-26

Lösningar

Uppgift 1

1a: Inför slackvariabler x_1, x_2 och x_3. Starta med slackvariablerna i basen.

Bas	z	x_Q	x_R	x_S	x_1	x_2	x_3	$\hat{b}$
z	1	-2	-1	-4	0	0	0	0
x_1	0	2	-1	0	1	0	0	10
x_2	0	-2	1	1	0	1	0	6
x_3	0	1	2	2	0	0	1	20

Först blir x_S inkommande och x_2 utgående.

Bas	z	x_Q	x_R	x_S	x_1	x_2	x_3	$\hat{b}$
z	1	-10	3	0	0	4	0	24
x_1	0	2	-1	0	1	0	0	10
x_S	0	-2	1	1	0	1	0	6
x_3	0	5	0	0	0	-2	1	8

Därefter blir x_Q inkommande och x_3 utgående.

Bas	z	x_Q	x_R	x_S	x_1	x_2	x_3	$\hat{b}$
z	1	0	3	0	0	0	2	40
x_1	0	0	-1	0	1	4/5	-2/5	34/5 = 6.8
x_S	0	0	1	1	0	1/5	2/5	46/5 = 9.2
x_Q	0	1	0	0	0	-2/5	1/5	8/5 = 1.6

Nu fås optimum: $x_Q = 1.6$, $x_R = 0$, $x_S = 9.2$, $x_1 = 6.8$, $x_2 = 0$, $x_3 = 0$ och $z = 40$. Svar: Blanda i 1.6 mg av ämne Q och 9.2 mg av ämne S, vilket ger vinsten 40 kr per flaska. Det första bivillkoret är inte aktivt (eftersom $x_1 > 0$), men de andra två är det.

1b: Frågan är alltså om det finns en optimallösning där $x_2 > 0$ (eftersom x_2 är slackvariabeln i det bivillkoret). I optimaltablån är x_2 icke-basvariabel och $\hat{c}_2 = 0$, så man kan välja x_2 som inkommande variabel och få en alternativ optimallösning. (Inga högerled är noll, så man får en annan lösning.) Svaret är alltså ja.

1c: LP-dual:

$$
\begin{array}{llrcrcrcll}
\min & v = & 10y_1 & + & 6y_2 & + & 20y_3 & & & \\
\text{då} & & 2y_1 & - & 2y_2 & + & y_3 & \geq & 2 & (Q) \\
& - & y_1 & + & y_2 & + & 2y_3 & \geq & 1 & (R) \\
& & & & y_2 & + & 2y_3 & \geq & 4 & (S) \\
& & y_1, & & y_2, & & y_3 & \geq & 0 &
\end{array}
$$

Läs av duallösningen ur optimaltablån: $y_1 = 0$, $y_2 = 0$, $y_3 = 2$.

Komplementaritet:

Primala bivillkor 1 är inte aktivt, $y_1 = 0$, OK
Primala bivillkor 2 är aktivt, $y_2 = 0$, OK (degeneration)
Primala bivillkor 3 är aktivt, $y_2 > 0$, OK
Duala bivillkor 1 är aktivt, $x_Q > 0$, OK
Duala bivillkor 2 är inte aktivt, $x_R =$, OK
Duala bivillkor 3 är aktivt, $x_S > 0$, OK

1d: Skuggpriserna är lika med duallösningen: $y_1 = 0$, $y_2 = 0$, $y_3 = 2$. Bivillkor 3 är det enda bivillkoret där man tjänar på en ökning av högerledet, så släpp lite på kravet på gulhet.

1e: Läs av B^{-1} ur optimaltablån: $B^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 4/5 & -2/5 \\ 0 & 1/5 & 2/5 \\ 0 & -2/5 & 1/5 \end{pmatrix}$

Beräkna ny optimallösning med $x_B = B^{-1}b$ (och håll reda på vilken basvariabel det är på varje rad): $x_Q = 4$, $x_R = 0$, $x_S = 8$, $x_1 = 2$, $x_2 = 0$, $x_3 = 0$ och $z = 40$. Lösningen är optimal eftersom den är tillåten (och vi inte ändrat på målfunktionen).

(Om man löser med simplexmetoden, blir den första iterationen degenererad, dvs. minsta kvot blir noll, men det går bra ändå.)

1f: P0: Första LP-opt: $x_Q = 1.6$, $x_R = 0$, $x_S = 9.2$ och $z = 40$. Detta ger $\bar{z} = 40$.
Förgrena över x_Q: Skapa P1 = P0 + ($x_Q \leq 1$), och P2 = P0 + ($x_Q \geq 2$).
Lös P1 ($x_Q \leq 1$): Grafisk lösning ger $x_Q = 1$ och $x_S = 8$ med $z = 34$.
Tillåten heltalslösning ger $\underline{z} = 34$.
Lös P2 ($x_Q \geq 2$): Grafisk lösning ger $x_Q = 2$ och $x_S = 9$ med $z = 40$.
Tillåten heltalslösning ger $\underline{z} = 40$.
Alla grenar är avsökta, så optimum blir $x_Q = 2$ och $x_S = 9$ med $z = 40$. Man förlorar alltså inget på heltalskravet.

Uppgift 2

2a: $\nabla f(x) = \begin{pmatrix} 4x_Q - x_S - 4 \\ -x_Q + 2x_S - 2 \end{pmatrix}$. d är avtaganderiktning i $\hat{x}$ om $d^T \nabla f(\hat{x}) < 0$. Gradienten i origo är $(-4, -2)$ så $d^T \nabla f(x) = -4 < 0$. Riktningen är även tillåten (kontrollera alla bivillkor), så svaret är ja.

2b: Gradienten i startpunkten blir $(-4, -2)$, aktiva bivillkor är $x \geq 0$, så LP-problemet blir $\min -d_1 - d_2$ då $0 \leq d \leq 1$, vilket har optimallösning $d = (1, 1)$. Sätt $x^{(2)} = (t, t)$. Maximal steglängd blir 1 (i båda bivillkoren). För att göra linjesökning beräknar vi $\phi(t) = f(x^{(2)}(t)) = 2t^2 - 6t$, vilket ger $\phi'(t) = 4t - 6$, så $\phi'(t) = 0$ ger $t = 1.5$. Vi sätter $t = t_{MAX} = 1$ och får $x^{(2)} = (1, 1)$. Nu blir $\nabla f(x^{(2)}) = (-1, -1)$. LP-problemet blir $\min -d_1 - d_2$ då $d_1 + 2d_2 \leq 0$, $d_1 \leq 0$, $-1 \leq d \leq 1$, vilket har optimum $d = (0, 0)$, så $x^{(2)} = (1, 1)$ är optimal.

När det gäller KKT-villkoren, noterar vi att bara de två första bivillkoren är aktiva, vilket ger $u_3 = 0$ och $u_4 = 0$. KKT3 blir

$$\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix} + u_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + u_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

dvs. $u_1 + u_2 = 1$ och $2u_1 = 1$, vilket ger $u_1 = 0.5 > 0$ och $u_2 = 0.5 > 0$, vilket verifierar optimalitet. (Problemet är konvext.)

Uppgift 3

3a: Basbågar till den givna lösningen: (1,3), (3,5), (2,4), (4,6), (5,6). Detta ger nodpriserna $y_1 = 0$, $y_2 = 9$, $y_3 = 10$, $y_4 = 21$, $y_5 = 21$, $y_6 = 29$, och följande reducerade kostnader: $\hat{c}_{12} = -1$ (optimalt ty x_{12} är maximal), $\hat{c}_{25} = 2$ (optimalt ty $x_{25} = 0$), $\hat{c}_{34} = 1$ (optimalt ty $x_{34} = 0$), så detta är optimum.

3b: Vi vet att vi vill öka x_{12}, och nu är det möjligt, så x_{12} blir inkommande variabel. (Strunta i att startlösningen formellt sett inte är en baslösning.)
Cykeln blir 1 - 2 - 4 - 6 - 5 - 3 - 1, ändringen blir en enhet, och utgående variabel blir x_{46}. Nu fås nodpriserna $y_1 = 0$, $y_2 = 8$, $y_3 = 10$, $y_4 = 20$, $y_5 = 21$, $y_6 = 29$, och reducerade kostnader: $\hat{c}_{12} = -1$ (optimalt), $\hat{c}_{25} = 1$ (optimalt), $\hat{c}_{34} = 2$ (optimalt), så detta är optimum.

Uppgift 4

Sök flödesökande väg med Dijkstras metod (max av min), vilket ger vägen 1 - 3 - 4 - 2 - 5 - 6 (där båge (2,4) används bakåt, dvs. x_{24} minskas). Man kan skicka 2 enheter den vägen. Därefter fås minsnitt kring nod 1, så flödet är maximalt.

Uppgift 5

5a: Använd Fords metod, ty negativa bågkostnader gör att Dijkstras metod ej fungerar. Väg: 1 - 3 - 4 - 2 - 5 - 6, kostnad 11.

5b: $y_1 = 0$, $y_2 = 7$, $y_3 = 10$, $y_4 = 5$, $y_5 = 3$, $y_6 = 11$.

5c: Dualt bivillkor: $y_4 - y_5 \leq c_{54}$. Stoppa in $y_4 = 5$ och $y_5 = 3$, vilket ger $c_{54} \geq 2$, så om $c_{54} < 2$ blir den duala lösningen otillåten, vilket betyder att den primala lösningen inte är optimal längre. (Faktum är att det bildas en negativ cykel: 5 - 4 - 2.)

Uppgift 6

6a: Billigaste 1-träd blir faktiskt cykeln 1 - 2 - 5 - 6 - 4 - 3 med kostnad 43. Problemet vi vill lösa är ett handelsresandeproblem, och 1-träd är en relaxation av detta problem, dvs. ger en undre gräns till det optimala målfunktionsvärdet. Om det billigaste 1-trädet råkar bli en handelsresandetur, har vi ju en tillåten lösning och en övre gräns som sammanfaller med den undre, så då är den turen optimal, vilket är vad som hände här. Optimalkostnaden är alltså precis 43.

6b: Nu har vi det kinesiska brevbärarproblemet. Noderna 2, 4, 3 och 5 har udda valens, så två båger behövs läggas till, dvs. man behöver gå två gånger i två bågar. Det billigaste sättet att öka valensen i dessa fyra noder är att lägga till bågarna (2, 5) och (3, 4).

Uppgift 7

7a: Efter första steget är $\alpha = (1,1,1,1)$ och $\beta = (0,1,0,0)$, samt

$$\hat{C} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 & 4 \\ 1 & 1 & 0 & 3 \\ 2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Nollorna i $\hat{C}$ kan strykas med tre streck (rad 1 och 3 samt kolumn 3), och därefter fås $\alpha = (1,2,1,2)$ och $\beta = (0,1,-1,0)$ (öka α för ostrukna rader, och minska β för strukna kolumner) samt

$$\hat{C} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

En tillåten (och optimal) lösning fås t.ex. om Albin gör del 1, Beata del 2, Cedric del 4 och Dagny del 3.

7b: Alla lösningar som enbart använder element med $\hat{c}_{ij} = 0$ har samma målfunktionsvärde som optimum i uppgift a. Nu vill vi hitta en lösning med två element i rad 2, vilket går bra. En möjlig (optimal) lösning är att Albin gör del 1, Beata del 2 och 3 och Cedric del 4. Dagny slipper. (Det finns även en optimal lösning där Albin slipper.)