Tekniska Högskolan i Linköping
Matematiska Institutionen
Optimeringslära
Kaj Holmberg

Optimering för ingenjörer
Lösning till tentamen
2013-01-08

Lösningar

Uppgift 1

Ytterligare variabeldefinition: y_j: antal snöslungor i lager efter månad j.

$$
\begin{array}{rll}
\min & \displaystyle\sum_{j=1}^{n} c_j(x_j) + \sum_{j=1}^{n-1} l_j y_j & \\
\text{då} & y_{j-1} + x_j - d_j = y_i & j = 1, \dots n \\
& 0 \leq y_j \leq L & j = 1, \dots n \\
& 0 \leq x_j \leq K & j = 1, \dots n \\
& y_0 = L_0 & \\
& x_j, y_j \text{ heltal} & j = 1, \dots n
\end{array}
$$

Uppgift 2

2a: Variabeldefinition: $x_j = 1$ om maskin j tas med, 0 om inte.

$$
\begin{array}{llllllllll}
\max & z = & 2x_1 & + & 3x_2 & + & 4x_3 & + & 4x_4 & \\
\text{då} & & 4x_1 & + & 5x_2 & + & 4x_3 & + & 5x_4 & \leq & 11 \\
& & x_1, & & x_2, & & x_3, & & x_4 & \in & \{0, 1\}
\end{array}
$$

2b: Kvoter för LP-lösning (c_j/a_j): x_1: 2/4=0.5, x_2: 3/5=0.6, x_3: 4/4=1, x_4: 4/5=0.8, vilket ger x_3 bäst, sedan x_4, x_2 och x_1.

Första LP-lösning (P0): $x_3 = 1$, $\hat{b} = 11 - 4 = 7$, $x_4 = 1$, $\hat{b} = 7 - 5 = 2$, $x_2 = 2/5 = 0.4$, $\hat{b} = 0$, $x_1 = 0$, $z = 9.2$, vilket ger $\bar{z} = 9$.
Avrundning neråt ger tillåten lösning $x_1 = 0$, $x_2 = 0$, $x_3 = 1$, $x_4 = 1$, samt $\underline{z} = 8$.

Förgrena över x_2: P1 = P0 + ($x_2 \leq 0$), P2 = P0 + ($x_2 \geq 1$).

P1: $x_3 = 1$, $\hat{b} = 11 - 4 = 7$, $x_4 = 1$, $\hat{b} = 7 - 5 = 2$, $x_2 = 0$, $\hat{b} = 2$, $x_1 = 2/4 = 0.5$, $z = 9$, vilket ger $\bar{z} = 9$.

Förgrena över x_1: P3 = P1 + ($x_1 \leq 0$), P4 = P1 + ($x_1 \geq 1$).

P3: $x_3 = 1$, $\hat{b} = 11 - 4 = 7$, $x_4 = 1$, $\hat{b} = 7 - 5 = 2$, $x_2 = 0$, $\hat{b} = 2$, $x_1 = 0$, $z = 8$. Kapa, ty bättre än $z = 8$ kan ej fås. (Heltal.)

P4: Fixering: $x_1 = 1$, $\hat{b} = 11 - 4 = 7$. $x_3 = 1$, $\hat{b} = 7 - 4 = 3$, $x_4 = 3/5$, $\hat{b} = 0$, $x_2 = 0$, $z = 8.4$. Kapa, ty bättre än $z = 8$ kan ej fås.

P2: Fixering: $x_2 = 1$, $\hat{b} = 11 - 5 = 6$. $x_3 = 1$, $\hat{b} = 6 - 4 = 2$, $x_4 = 2/5 = 0.4$, $\hat{b} = 0$, $x_1 = 0$, $z = 8.6$. Kapa, ty bättre än $z = 8$ kan ej fås.

Trädet avsökt. Bästa lösning $x_1 = 0$, $x_2 = 0$, $x_3 = 1$, $x_4 = 1$, med $z = 8$.
Svar i ord: Ta med maskin 3 och 4.

Uppgift 3

3a: Kinesiskt brevbärarproblem. Alla noder har inte jämn valens, så det finns ingen Eulertur (dvs. en tur som inte använder någon redan sandad väg).

Noderna 2 och 7 har udda valens, och billigaste sättet att öka dessa noders valens är bågen (2,7), så den bågen ska köras två gånger. Exempel på tur: 1-2-3-1-8-4-6-5-7-2-7-3-5-4-1. Kostnad: 115.

3b: Handelsresandeproblem. *NP*-svårt.

Innan man sätter igång med en heuristik, kan man notera att nod 8 och 6 har valens två, så bågarna (1,8), (8,4), (4,6) och (6,5) måste vara med i turen. Detta gör att bågarna (1,4) och (4,5) inte får vara med. Det enda som återstår är att hitta en väg från nod 5 till nod 1 som också passerar noderna 2, 3 och 7, t.ex. vägen 5-7-3-2-1. Vi får turen 1-8-4-6-5-7-3-2-1, med kostnad 60. (Alternativ: Närmaste granne, eller flytta om bågar från billigaste 1-träd.)

En optimistisk uppskattning fås lämpligtvis av billigaste 1-träd, vilket har kostnad 55.

Optimum ligger alltså mellan 55 och 60.

3c: Kör Dijkstras metod med start i nod 1. Det ger nodmärkningar för alla noder, dvs. billigaste väg till alla noder. Nodmärkningarna ger billigaste vägträdet: nod 1: (0,-), nod 2: (9,1), nod 3: (8,1), nod 4: (14,8), nod 5: (16,3), nod 6: (24,5), nod 7: (15,3), nod 8: (8,1).

Uppgift 4

4a:

$$
\begin{array}{llrcrcl}
\max & z = & 2x_1 & + & x_2 & & \\
\text{då} & & x_1 & + & x_2 & \leq & 3 \\
 & & 3x_1 & + & x_2 & \leq & 6 \\
 & & x_1, & & x_2 & \geq & 0
\end{array}
$$

Inför slackvariabler x_3 och x_4. Starta med slackvariablerna i basen.

Bas	z	x_1	x_2	x_3	x_4	$\hat{b}$
z	1	-2	-1	0	0	0
x_3	0	1	1	1	0	3
x_4	0	3	1	0	1	6

Först blir x_1 inkommande och x_4 utgående.

Bas	z	x_1	x_2	x_3	x_4	$\hat{b}$
z	1	0	-1/3	0	2/3	4
x_3	0	0	2/3	1	-1/3	1
x_1	0	1	1/3	0	1/3	2

Sedan blir x_2 inkommande och x_3 utgående.

Bas	z	x_1	x_2	x_3	x_4	$\hat{b}$
z	1	0	0	1/2	1/2	9/2
x_2	0	0	1	3/2	-1/2	3/2
x_1	0	1	0	-1/2	1/2	3/2

Därefter fås optimum. $x_1 = 1.5$, $x_2 = 1.5$, $x_3 = 0$, $x_4 = 0$, och $z = 4.5$. Svar: Blanda 1.5 enheter sand av sort 1 med 1.5 enheter av sort 2. Båda bivillkoren är aktiva.

4b: Skuggpriserna är $y_1 = 0.5$ och $y_2 = 0.5$. Om första högerledet ökas med 0.2 och andra minskas med 0.1 fås målfunktionsändringen $0.5 * 0.2 - 0.5 * 0.1 = 0.05 > 0$, så lösningen blir bättre.

4c: LP-dual:

$$\begin{array}{llrcrcl} \min & v = & 3y_1 & + & 6y_2 & & \\ \text{då} & & y_1 & + & 3y_2 & \geq & 2 \\ & & y_1 & + & y_2 & \geq & 1 \\ & & y_1, & & y_2 & \geq & 0 \end{array}$$

Läs av duallösningen ur optimaltablån: $y_1 = 0.5$, $y_2 = 0.5$. (Kolla gärna dual tillåtenhet, samt komplementaritet.)

Uppgift 5

5a:

$$\begin{array}{rl} \min & f(x) = x_1^2 + 4x_2^2 + 2x_1 + 5x_2 - x_1x_2 \\ \text{då} & x_1 + x_2 \leq 3 \\ & 3x_1 + x_2 \leq 6 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{array}$$

$\nabla f(x) = \begin{pmatrix} 2x_1 - x_2 + 2 \\ -x_1 + 8x_2 + 5 \end{pmatrix}$. Gradienten i origo är $(2, 5)$, d är avtaganderiktning i $\hat{x}$ om $d^T \nabla f(\hat{x}) < 0$, men $d^T \nabla f(x) = 2d_1 + 5d_2 \geq 0$ om $d_1 \geq 0$ och $d_2 \geq 0$, vilket de måste vara för att ge en tillåten riktning i origo. Svaret är alltså nej, det finns ingen tillåten avtaganderiktning i origo. Det betyder att origo är ett lokalt minimum (och även globalt minimum, eftersom problemet är konvext). Vi vill alltså inte använda någon sand alls.

5b: Gradienten i startpunkten är $(0, 21)$, aktiva bivillkor är $x_1 \geq 0$ och $x_1 + x_2 \geq 2$, så LP-problemet blir

min $21d_2$ då $d_1 \geq 0$, $d_1 + d_2 \geq 0$ och $-1 \leq d \leq 1$,

vilket har optimallösning $d = (1, -1)$. Sätt $x^{(2)} = (t, 2 - t)$. Maximal steglängd blir 1. För att göra linjesökning beräknar vi $\phi(t) = f(x^{(2)}(t)) = 6t^2 - 21t + 26$, vilket ger $\phi'(t) = 12t - 21$, så $\phi'(t) = 0$ ger $t = 1.75$. Vi sätter $t = t_{MAX} = 1$ och får $x^{(2)} = (1, 1)$. Nu blir $\nabla f(x^{(2)}) = (3, 12)$. LP-problemet blir

min $3d_1 + 12d_2$ då $d_1 + d_2 \geq 0$, $d_2 \geq d_1$, $-1 \leq d \leq 1$,

vilket har optimum $d = (0, 0)$, så $x^{(2)} = (1, 1)$ är optimal.

5c: KKT1: Punkten är tillåten.
KKT2: I punkten är bivillkoren $x_1 + x_2 \geq 2$ (dvs. $-x_1 - x_2 + 2 \leq 0$) och $x_2 \geq x_1$ (dvs. $x_1 - x_2 \leq 0$) aktiva. För alla andra bivillkor blir multiplikatorerna noll.
KKT3:

$$\begin{pmatrix} 3 \\ 12 \end{pmatrix} + u_1 \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix} + u_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

dvs. $u_1 - u_2 = 3$ och $u_1 + u_2 = 12$, vilket ger $u_1 = 7.5 > 0$ och $u_2 = 4.5 > 0$, vilket verifierar optimalitet. (Problemet är konvext.)

Rita grafiskt in gradienterna till dessa bivillkor samt $-\nabla f(x)$ för att verifiera att det inte finns någon tillåten avtaganderiktning.

Uppgift 6

6a: Basbågar till den givna lösningen: (1,2), (1,3), (3,5), (5,6) samt t.ex. (3,4). Detta ger nodpriserna $y_1 = 0$, $y_2 = 5$, $y_3 = 6$, $y_4 = 10$, $y_5 = 12$, $y_6 = 18$, och följande reducerade kostnader: $\hat{c}_{24} = -1$ (vill öka x_{24}), $\hat{c}_{26} = -6$ (optimalt ty x_{26} är maximal), $\hat{c}_{46} = -3$ (optimalt ty x_{46} är maximal). Lösningen är inte billigast, och x_{24} blir inkommande variabel. Cykeln blir 2 - 4 - 3 - 1 - 2, ändringen blir en enhet, och utgående variabel blir x_{13}. Nu fås nodpriserna $y_1 = 0$, $y_2 = 5$, $y_3 = 5$, $y_4 = 9$, $y_5 = 11$, $y_6 = 17$, och reducerade kostnader: $\hat{c}_{13} = 1$ (optimalt), $\hat{c}_{26} = -5$ (optimalt), $\hat{c}_{46} = -3$ (optimalt), så detta är optimum.

6b: $\hat{c}_{36} = 10 + y_3 - y_6 = 10 + 5 - 17 = -2$. Vi tjänar alltså 2 per skickad enhet. Dock kan endast 2 enheter ruttas om denna väg (pga. båge (3,5)), så kostnaden sänks bara med 4. Låt parken vara.

Uppgift 7

7a: Efter första steget är $\alpha = (5, 4, 6, 5)$ och $\beta = (0, 1, 0, 2)$, samt

$$\hat{C} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

En tillåten (och optimal) lösning fås för $x_{13} = 1$, $x_{31} = 1$, samt t.ex. $x_{22} = 1$ och $x_{44} = 1$, dvs. förare 1 kör traktor 3, förare 2 kör traktor 2, förare 3 kör traktor 1, förare 4 kör traktor 4. Totaltid: 23.

7b: $\alpha = (5, 4, 6, 5)$, $\beta = (0, 1, 0, 2)$.

7c: Den enda skillnaden är att α_2 minskar med 2 enheter. $\hat{C}$ blir oförändrad, och därmed också den primala lösningen.