Tekniska Högskolan i Linköping
Matematiska Institutionen
Optimeringslära
Kaj Holmberg

Optimering för ingenjörer
Lösning till tentamen
2013-05-29

Lösningar

(Dessa lösningar kan användas för att kontrollera huruvida man har rätt svar. De är dock inte säkert tillräckligt detaljerade för att ge full poäng på tentan.)

Uppgift 1

1a: Handelsresandeproblem. (*NP*-svårt.) Lämplig relaxation: Billigaste 1-träd. Lösning: (1,2), (1,3), (2,4), (3,4), (3,5), (3,6), (5,7), (7,8). Kostnad: 39, vilket blir undre gräns. Den givna turen har kostnad 41, vilket blir övre gräns. Optimala kostnaden ligger alltså mellan 39 och 41.

1b: Nod 1 ska ha valens två: (1,2) och (1,3) måste vara med.
Nod 2 ska ha valens två: (2,4) måste vara med.
Liten cykel 1-2-4-3-1 ej tillåten: (3,4) får ej vara med.
Nod 4 ska ha valens två: (4,5) måste vara med.
Liten cykel 1-2-4-5-3-1 ej tillåten: (3,5) får ej vara med.
Nod 3 ska ha valens två: (3,6) måste vara med.
Liten cykel 1-2-4-5-6-3-1 ej tillåten: (5,6) får ej vara med.
Nod 5 ska ha valens två: (5,7) måste vara med.
Liten cykel 1-2-4-5-7-6-3-1 ej tillåten: (6,7) får ej vara med.
Nod 8 ska ha valens två: (6,8) och (7,8) måste vara med.

Allt är fixerat, och vi har en enda tillåten cykel: 1-2-4-5-7-8-6-3-1. Kostnad: 41.

1c: Kinesiska brevbärarproblemet. Finn billigaste sättet att dubblera bågar så att alla noder får jämn valens. Noderna 4 och 7 har udda valens. Lägg till bågarna (4,5) och (5,7). De ska köras två gånger. Totalkostnad: 74.

Uppgift 2

2a: Kör Dijkstras metod med start i nod 7. Det ger nodmärkningar för alla noder, dvs. billigaste väg till alla noder. Nodmärkningarna ger billigaste vägträdet (kostnad, föregångare): nod 1: (34,2), nod 2: (29,4), nod 3: (10,6), nod 4: (23,5), nod 5: (15,3), nod 6: (6,7), nod 7: (0,-), nod 8: (12,6).

2b: Aktuella för vändning: (5,7): $\hat{c}_{75} = 0 + 1 - 15 = -14$. (8,7): $\hat{c}_{78} = 0 + 3 - 12 = -9$. Båda ger vinst, men (5,7) ger mest. (Dessutom sänks flera nodpriser med 14.)

2c: Maxflöde från nod 5 till nod 3, med alla bågkapaciteter lika med ett.
Första vägsökningen (med Dijkstra) ger vägen: 5-6-3. Kapacitet 1, skicka. Ändra tillåtna riktningar. Andra vägsökningen (med Dijkstra) ger vägen: 5-4-3. Kapacitet 1, skicka. Ändra tillåtna riktningar. I tredje vägsökningen kan Dijkstras metod bara märka nod 5, 7, 6 och 8, så vi har maxflöde 2, och minsnittet är (5,4) och (6,3) samt (3,5) baklänges.

Uppgift 3

3a:
Inför slackvariabler x_4, x_5 och x_6. Starta med slackvariablerna i basen.

Bas	z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	$\hat{b}$
z	1	-1	-10	-4	0	0	0	0
x_4	0	1	2	0	1	0	0	5000
x_5	0	0	1	1	0	1	0	4000
x_6	0	1	0	2	0	0	1	5000

Först blir x_2 inkommande och x_4 utgående.

Bas	z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	$\hat{b}$
z	1	4	0	-4	5	0	0	25000
x_4	0	1/2	1	0	1/2	0	0	2500
x_5	0	-1/2	0	1	-1/2	1	0	1500
x_6	0	1	0	2	0	0	1	5000

Sedan blir x_3 inkommande och x_5 utgående.

Bas	z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	$\hat{b}$
z	1	2	0	0	3	4	0	31000
x_4	0	1/2	1	0	1/2	0	0	2500
x_5	0	-1/2	0	1	-1/2	1	0	1500
x_6	0	2	0	0	1	-2	1	2000

Därefter fås optimum. $x_1 = 0$, $x_2 = 2500$, $x_3 = 1500$, $x_4 = 0$, $x_5 = 0$, $x_6 = 2000$, och $z = 31000$. Svar: Gör 2500 satser av sort 2 och 1500 av sort 3. Vinsten blir 31000 kr. Vi får 2000 torxmejslar över.

3b: Skuggpriserna är $y_1 = 3$, $y_2 = 4$ och $y_3 = 0$. Det verkar bäst att öka antalet kryssmejslar (bivillkor 2) med 10, vilken skulle ge vinsten 40.

3c: LP-dual:

$$\begin{array}{llrcrcrcr}
\min & v = & 5000y_1 & + & 4000y_2 & + & 5000y_3 & & \\
\text{då} & & y_1 & & & + & y_3 & \geq & 1 \\
 & & 2y_1 & + & y_2 & & & \geq & 10 \\
 & & & & y_2 & + & 2y_3 & \geq & 4 \\
 & & y_1, & & y_2, & & y_3 & \geq & 0
\end{array}$$

Läs av duallösningen ur optimaltablån: $y_1 = 3$, $y_2 = 4$ och $y_3 = 0$.

Komplementaritet: Första primala bivillkoret är aktivt, $y_1 = 3$.
Andra primala bivillkoret är aktivt, $y_2 = 4$.
Tredje primala bivillkoret är inte aktivt, $y_3 = 0$.
Första duala bivillkoret är inte aktivt, $x_1 = 0$.
Andra duala bivillkoret är aktivt, $x_2 = 2500$.
Tredje duala bivillkoret är aktivt, $x_3 = 1500$.

3d: Ändringen ger att $\hat{c}_1$ i optimaltablån ändras från -2 till -1 (siffran i tablån från 2 till 1). Tablån är fortfarande optimal. Optimallösningen ändras ej.

Uppgift 4

4a:
Första LP-lösning (P0): $x_1 = 0$, $x_2 = 2.5$, $x_3 = 1.5$, och $z = 31$, vilket ger $\bar{z} = 31$. Avrundning neråt ger tillåten lösning $x_1 = 0$, $x_2 = 2$, $x_3 = 1$, samt $\underline{z} = 24$.

Förgrena över x_2: P1 = P0 + ($x_2 \leq 2$), P2 = P0 + ($x_2 \geq 3$).

P1: $x_1 = 0$, $x_2 = 2$, $x_3 = 2$, och $z = 28$, heltal, vilket ger $\underline{z} = 28$. Kapa.

P2: Ingen tillåten lösning. Kapa.

Trädet avsökt. Bästa lösning $x_1 = 0$, $x_2 = 2$, $x_3 = 2$, med $z = 28$.
Svar i ord: Gör 2000 satser av typ 2 och 3.

Uppgift 5

5a:
$$\begin{array}{rl} \min & f(x) = 3x_1^2 + 2x_2^2 - 6x_1 - 2x_2 \\ \text{då} & x_1 + x_2 \leq 1, x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{array}$$

$\nabla f(x) = \begin{pmatrix} 6x_1 - 6 \\ 12x_2 - 2 \end{pmatrix}$. Gradienten i startpunkten (1,0) är $(0, -2)$, aktiva bivillkor är $x_1 + x_2 \leq 1$ och $x_2 \geq 0$, så LP-problemet blir

min $z = -2d_2$ då $d_1 + d_2 \leq 0$, $d_2 \geq 0$, samt $-1 \leq d \leq 1$,

vilket har optimallösning $d = (-1, 1)$ med $z = -2$. Sätt $x^{(2)} = (1 - t, t)$. Maximal steglängd blir 1 pga. $x_1 \geq 0$. För att göra linjesökning beräknar vi $\phi(t) = f(x^{(2)}(t)) = 5t^2 - 2t - 3$, vilket ger $\phi'(t) = 10t - 2$, så $\phi'(t) = 0$ ger $t = 0.2$, vilket är tillåtet. Vi får $x^{(2)} = (0.8, 0.2)$. Nu blir $\nabla f(x^{(2)}) = (-1.2, -1.2)$. LP-problemet blir

min $z = -1.2d_1 - 1.2d_2$ då $d_1 + d_2 \leq 0$, $-1 \leq d \leq 1$,

vilket har ger $z \geq 0$ (optimum exempelvis $d = (0, 0)$ eller $(1, -1)$ eller $(-1, 1)$). Alltså är $x^{(2)} = (0.8, 0.2)$ optimal.

Det skulle inte ha gjort någon skillnad om vi hade haft $x_1 + x_2 = 1$ (eftersom vi fick $d_1 + d_2 = 0$ i alla LP-lösningar).

5b: KKT1: Punkten är tillåten.
KKT2: Bivillkoren $x_1 + x_2 \leq 1$ och $x_1 \geq 0$ aktiva, men $x_2 \geq 0$ inte är aktivt, så $u_3 = 0$.
KKT3: $\begin{pmatrix} -6 \\ 2 \end{pmatrix} + u_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + u_3 \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

dvs. $u_1 - u_2 = 6$ och $u_1 = -2$, vilket ger $u_1 = -2 < 0$ och $u_2 = -8 < 0$, så enligt KKT4 är detta inte en KKT-punkt.

5c: Rita grafiskt in gradienterna $-\nabla f(x) = \begin{pmatrix} 6 \\ -2 \end{pmatrix}$, $\nabla g_1(x) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ och $\nabla g_2(x) = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ (men inte $\nabla g_3(x) = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$, för det bivillkoret är inte aktivt), i punkten $(0, 1)$, och notera att $-\nabla f(x)$ inte ligger i konen av bivillkorsgradienterna.

Uppgift 6

6a: Efter första steget är $\alpha = (100, 120, 98, 130)$ och $\beta = (0, 41, 2, 0)$, samt

$$\hat{C} = \begin{pmatrix} 5 & 13 & 2 & 0 \\ 0 & 11 & 2 & 0 \\ 0 & 9 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

En tillåten (och optimal) lösning fås för $x_{14} = 1$, $x_{21} = 1$, $x_{33} = 1$ och $x_{42} = 1$, dvs. målare 1 målar sida 4, målare 2 målar sida 1, målare 3 målar sida 3, målare 4 målar sida 2. Totaltid: 491.

7b: Eftersom $\alpha_1 = 100$ och $\alpha_3 = 98$ är målare 1 och 3 ungefär lika snabba. $\alpha_2 = 120$, så målare 2 är betydligt långsammare, och $\alpha_4 = 130$, så målare 3 är långsammast. När det gäller hussidor, ser vi att $\beta_2 = 41$, medan $\beta_1 = 0$, $\beta_3 = 2$, $\beta_4 = 0$, så hussida 2 är mer tidskrävande än de andra tre.