Tekniska Högskolan i Linköping
Matematiska Institutionen
Optimeringslära
Kaj Holmberg

Optimering för ingenjörer
Lösning till tentamen
2013-11-01

Lösningar

Uppgift 1

1a: Problemet skrivet i standardform är:

$$
\begin{array}{rl}
\min & f(x) = 2x_1^2 + 2x_1 + 3(x_2 - 10)^2 - 2x_1x_2 \\
\text{då} & g_1(x) = x_1 + x_2 - 6 \le 0 \\
 & g_2(x) = x_1 - x_2 \le 0 \\
 & g_3(x) = -x_1 + 0.5x_2 \le 0 \\
 & g_4(x) = -x_1 \le 0 \\
 & g_5(x) = -x_2 \le 0
\end{array}
$$

(Genom att rita upp det tillåtna området, ser man att de två sista bivillkoren är redundanta och kan tas bort.)

Vi har $\nabla f(x) = \begin{pmatrix} 4x_1 - 2x_2 + 2 \\ -2x_1 + 6(x_2 - 10) \end{pmatrix}$.

Gradienten i origo är $(2, -60)$, aktiva bivillkor är alla utom det första, så LP-problemet blir

$\min z = 2d_1 - 60d_2$ då $d_1 \le d_2$, $d_1 \ge 0.5d_2$, $d_1 \ge 0$, $d_2 \ge 0$, samt $-1 \le d \le 1$,

vilket har optimallösning $d = (0.5, 1)$ med $z = -9$. Sätt $x^{(2)} = (0.5t, t)$. Maximal steglängd blir 4 pga. första bivillkoret. För att göra linjesökning beräknar vi $\phi(t) = f(x^{(2)}(t)) = 2.5t^2 - 59t + 300$, vilket ger $\phi'(t) = 5t - 59$, så $\phi'(t) = 0$ skulle ge $t = 11.8$, vilket inte är tillåtet, så vi sätter $t = 4$. Vi får $x^{(2)} = (2, 4)$.

Nu blir $\nabla f(x^{(2)}) = (2, -40)$. Aktiva bivillkor är nu 1 och 3. LP-problemet blir

$\min z = 2d_1 - 40d_2$ då $d_1 + d_2 \le 0$, $d_1 \ge 0.5d_2$, $-1 \le d \le 1$,

vilket har optimallösning $d = (0, 0)$ med $z = 0$. Alltså är $x^{(2)} = (2, 4)$ optimal.

1b: Bivillkorsgradienterna är $\nabla g_1(x) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\nabla g_2(x) = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$, $\nabla g_3(x) = \begin{pmatrix} -1 \\ 0.5 \end{pmatrix}$, $\nabla g_4(x) = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\nabla g_5(x) = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$.

I punkten $x_1 = 0$, $x_2 = 0$ är alla bivillkor utom 1 aktiva, så där ritar man in $\nabla g_2(x)$, $\nabla g_3(x)$, $\nabla g_4(x)$, $\nabla g_5(x)$. (Eftersom de två sista bivillkoren är redundanta, spelar de två sista gradienterna ingen roll.)

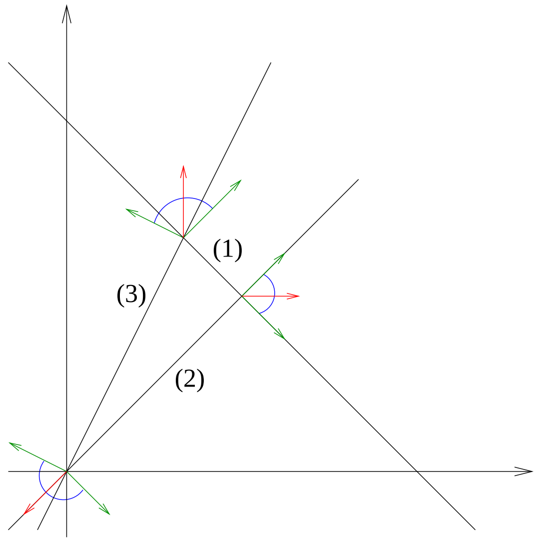
I punkten $x_1 = 3$, $x_2 = 3$ är bivillkor 1 och 2 aktiva, så där ritar man in $\nabla g_1(x)$ och $\nabla g_3(x)$.

I punkten $x_1 = 2$, $x_2 = 4$ är bivillkor 1 och 3 aktiva, så där ritar man in $\nabla g_1(x)$ och

$\nabla g_3(x)$.

1c: Kriteriet är att $-\nabla f(x)$ ska ligga i konen som spänns upp av gradienterna för de aktiva bivillkoren.
I punkten $x_1 = 0$, $x_2 = 0$ kan man ta t.ex. $-\nabla f(x) = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix}$.
I punkten $x_1 = 3$, $x_2 = 3$ kan man ta t.ex. $-\nabla f(x) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.
I punkten $x_1 = 2$, $x_2 = 4$ kan man ta t.ex. $-\nabla f(x) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

(För att göra detta ordentligt borde man beräkna KKT-multiplikatorerna för varje fall, men det behövs inte i denna uppgift.)



Uppgift 2

2a:
Inför slackvariabler x_3, x_4 och x_5. Starta med slackvariablerna i basen.

Bas	z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	$\hat{b}$
z	1	-2	-3	0	0	0	0
x_3	0	1	1	1	0	0	6
x_4	0	1	-1	0	1	0	0
x_5	0	-1	1/2	0	0	1	0

Först blir x_2 inkommande och x_5 utgående.

Bas	z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	$\hat{b}$
z	1	-8	0	0	0	6	0
x_3	0	3	0	1	0	-2	6
x_4	0	-1	0	0	1	2	0
x_2	0	-2	1	0	0	2	0

Sedan blir x_1 inkommande och x_3 utgående.

Bas	z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	$\hat{b}$
z	1	0	0	8/3	0	2/3	16
x_1	0	1	0	1/3	0	-2/3	2
x_4	0	0	0	1/3	1	4/3	2
x_2	0	0	1	2/3	0	2/3	4

Därefter fås optimum. $x_1 = 2$, $x_2 = 4$, ($x_3 = 0$, $x_4 = 2$, $x_5 = 0$,) och $z = 16$. Svar: Ta 2 dl vatten och 4 dl socker. (Det andra bivillkoret är inte aktivt.)

2b: Skuggpriset är $y_1 = 8/3$, så en ökning av detta högerled med en enhet skulle ge en ökning av målfunktionsvärdet med 2.6667.

2c: Reducerad kostnad för den nya variabeln, x_6, blir $\hat{c}_6 = c_6 - a_6^T y$, där $a_6 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, och y är den optimala duallösningen, som läses ut ur optimaltablån: $y_1 = 8/3$, $y_2 = 0$ och $y_3 = 2/3$. Vi får $\hat{c}_6 = c_6 - 8/3$, så x_6 blir inkommande om $c_6 - 8/3 > 0$, dvs. $c_6 > 8/3$. Svar: $c_6 \geq 3$.

Uppgift 3

3a: Det är ett handelsresandeproblem, som är *NP*-svårt. Det är osannolikt att han hittar en optimerande app/kod för det problemet. Det finns kanske heuristiker av okänd kvalitet tillgängliga.

3b: Närmaste-granne-heuristiken är den enklaste. Den ger t.ex. turen 1-2-5-3-6-7-4-1, med kostnad 44.

3c: En lämplig relaxation är billigaste 1-träd, vilket har kostnad 41, och innehåller bågarna (1,2), (1,4), (2,5), (3,5), (4,7), (5,7) och (6,7).

Det optimala målfunktionsvärdet ligger alltså mellan 41 och 44.

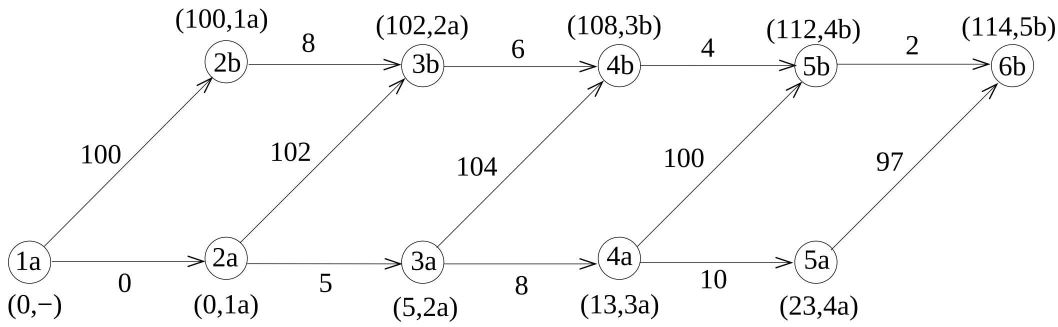
Uppgift 4

4a: Kinesiskt brevbärarproblem. Ja, polynomisk optimerande metod finns.

4b: Alla noder har inte jämn valens, så det finns ingen Eulertur (dvs. en tur som inte kör på någon redan sandad väg). Noderna 3 och 7 har udda valens, och billigaste sättet att öka dessa noders valens är bågarna (3,5) och (5,7), så de bågarna ska köras två gånger. Kostnaden blir summan av alla bågkostnader plus 11, vilket är 82. En optimal tur ges exempelvis av 1-2-3-6-7-5-3-5-7-4-5-2-4-1.

Uppgift 5

5a: Problemet kan ses som Dynamisk programmering, och en optimal lösning kan finnas med en billigaste-väg-metod, t.ex. Dijkstras metod.



Billigaste vägen blir 1a-2a-3b-4b-5b-6b och kostar 114.

Lösningen blir att köra med sommardäck i en vecka och sedan byta.

5b: Öka antal steg (veckor) till 52. Inför bågar "neråt", dvs. för att byta från dubbdäck till sommardäck. Inför en tredje nivå i grafen, motsvarande dubbfria vinterdäck. Om man ska införa möjligheter att byta fram och tillbaka mellan alla däcksorter är en smaksak. Jag skulle göra det, och lita på att kostnaderna gör att man inte byter för mycket. (Man måste beräkna kostnaderna för alla bågar, så en långtidsprognos för vädret behövs.)

Uppgift 6

6a: Grafen blir tudelad, med noderna 1, 2 och 3 i första nivån (odlingar), och noderna 4 och 5 i andra (fabriker). Källstyrkan är 20, 15 och 7 i noderna 1, 2 och 3, och sänkstyrkan är 21 och 21 i noderna 4 och 5.

Den givna startlösningen ger följande basbågar: (1,5), (2,4), (3,4) och (3,5). Detta ger nodpriserna $y_1 = 0$, $y_2 = 0$, $y_3 = -3$, $y_4 = 5$, $y_5 = 6$, och följande reducerade kostnader: $\hat{c}_{14} = -1 < 0$ (inte optimalt, öka), $\hat{c}_{25} = 2 > 0$ (optimalt).

Detta ger x_{14} som inkommande variabel (att öka). Cykeln blir 1-4-3-5-1, ändringen blir 6 enheter, och utgående variabel blir x_{34}.

Nu fås nodpriserna $y_1 = 0$, $y_2 = -1$, $y_3 = -3$, $y_4 = 4$, $y_5 = 6$, och följande reducerade kostnader: $\hat{c}_{14} = 1 > 0$ (optimalt), $\hat{c}_{35} = 1 > 0$ (optimalt). Lösningen är optimal.

6b: Inför en fiktiv odling som odlar och levererar det som inte finns i verkligheten, eller med andra ord en källa för fabrikernas överkapacitet. Dra bågar från den noden till alla fabriker med kostnad noll. I exemplet skall denna källa vara av styrka 60-42=18.

Uppgift 7

7a: Variabeldefinition: x_j är antal träd som plockas av på odling j.

$$
\begin{aligned}
\max \quad z = \quad & \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \\
\text{då} \quad & \sum_{j=1}^{n} a_j x_j \le b \\
& l_j \le x_j \le u_j \quad \text{för alla } j \\
& x_j \text{ heltal, för alla } j
\end{aligned}
$$

7b: Nu förenklas problemet till

$$\begin{array}{rl} \max & z = 10x_1 + 12x_2 \\ \text{då} & 2x_1 + 3x_2 \le 20 \\ & 3 \le x_1 \le 10 \\ & 3 \le x_2 \le 10 \\ & x_1, x_2 \text{ heltal} \end{array}$$

P0: Grafisk lösning ger $x_1 = 5.5$, $x_2 = 3$, $z = 91$, vilket ger $\bar{z} = 91$.

Förgrena över x_1: P1 = P0 + ($x_1 \le 5$), P2 = P0 + ($x_1 \ge 6$).

Jag väljer att gå ner i $\le$-grenen först.

P1: Grafisk lösning ger $x_1 = 5$, $x_2 \approx 3.333$, $z = 90$, vilket ger $\bar{z} = 90$.

Förgrena över x_2: P3 = P1 + ($x_2 \le 3$), P4 = P1 + ($x_2 \ge 4$).

P3: Grafisk lösning ger $x_1 = 5$, $x_2 = 3$, $z = 86$. Tillåten heltalslösning, $\underline{z} = 86$. Kapa.

P4: Grafisk lösning ger $x_1 = 4$, $x_2 = 4$, $z = 88$. Tillåten heltalslösning, $\underline{z} = 88$. Kapa.

P2: Tillåten lösning saknas. Kapa.

Trädet avsökt. Bästa lösning $x_1 = 4$, $x_2 = 4$, med $z = 88$.
Svar i ord: Plocka av fyra träd på båda odlingarna. Detta ger en vinst på 8800 kr.

7c: Optimallösningen blir LP-lösningen i P0 i uppgift a: $x_1 = 5.5$, $x_2 = 3$, $z = 91$, dvs. plocka av 5.5 träd på odling 1 och 3 träd på odling 2, vilket ger vinsten 9100 kr. Man skulle alltså tjäna 300 kr på att tillåta plockning av delar av träd.