Tekniska Högskolan i Linköping
Matematiska Institutionen
Optimeringslära
Kaj Holmberg

Optimering för ingenjörer
Lösning till tentamen
2014-05-28

Lösningar

Uppgift 1

1a: Kör Dijkstras metod *en gång* med A1 som startnod. Nysta upp baklänges från alla salar studenterna ska till. Detta ger följande bågflöden: (A1,A2): 100, (A2,A3): 50, (A1,B1): 120, (B1,C1): 120, (C1,C2): 90, (C2,C3): 60, (C3,C4): 30, resten noll.

1b: Den givna startlösningen är tillåten och ger att alla bågar med positivt flöde, förutom (B1,C1), är basbågar. Detta ger nodpriserna $y_{A1} = 0$, $y_{A2} = 8$, $y_{A3} = 15$, $y_{B1} = 5$, $y_{B2} = 14$, $y_{B3} = 22$, $y_{B4} = 28$, $y_{C1} = 12$, $y_{C2} = 20$, $y_{C3} = 26$, $y_{C4} = 34$, och följande reducerade kostnader: $\hat{c}_{A2,B2} = 0$ (optimalt), $\hat{c}_{A3,B3} = -1 < 0$ (ej optimalt, öka), $\hat{c}_{B1,C1} = -2 < 0$ (optimalt), $\hat{c}_{B2,C2} = 0$ (optimalt), $\hat{c}_{B3,C3} = 1 > 0$ (optimalt). Lösningen är ej optimal.

Detta ger $x_{A3,B3}$ som inkommande variabel (att öka). Cykeln blir A3-B3-B2-B1-A1-A2-A3, ändringen blir 20 enheter, och utgående variabel blir t.ex. $x_{B2,B3}$.

Nu fås nodpriserna $y_{A1} = 0$, $y_{A2} = 8$, $y_{A3} = 15$, $y_{B1} = 5$, $y_{B2} = 14$, $y_{B3} = 21$, $y_{B4} = 27$, $y_{C1} = 11$, $y_{C2} = 19$, $y_{C3} = 25$, $y_{C4} = 33$, och följande reducerade kostnader: $\hat{c}_{A2,B2} = 0$ (optimalt), $\hat{c}_{B2,B3} = 1 > 0$ (optimalt), $\hat{c}_{B1,C1} = -1 < 0$ (optimalt), $\hat{c}_{B2,C2} = 1 > 0$ (optimalt), $\hat{c}_{B3,C3} = 1 > 0$ (optimalt). Lösningen är optimal. Flödet är (A1,A2): 120, (A2,A3): 70, (A3,B3): 20, (A1,B1): 100, (B1,C1): 100, (C1,C2): 70, (C2,C3): 40, (C3,C4): 10, resten noll.

1c: Sätt övre gränsen på båge (A1,B1) till 100, och inför en parallellbåge till (A1,B1) med dubbelt så hög kostnad, 10, och stor övre gräns. (Om du inte vill ha parallella bågar, inför en extranod mitt på nya bågen.) Gör på samma sätt för (B1,C1). Detta ger en konvex funktion.

1d: Lösningen till uppgift b gav nodpriser $y_{A1} = 0$, $y_{B1} = 5$, $y_{C1} = 11$, så reducerade kostnader för parallellbågarna blir $\hat{c}_{A1,B1} = 10 + 0 - 5 = 5 > 0$ (optimalt) och $\hat{c}_{B1,C1} = 10 + 5 - 11 = 4 > 0$ (optimalt). Så lösningen är fortfarande optimal. (Om man använder extranoder, blir totala effekten densamma, oavsett hur man delar upp bågkostnaderna. En av bågarna måste dock vara basbåge.)

1e: De två första (triviala) flödesökande vägarna är (t.ex.) A1-A2-A3-B3-B4-C4 och A1-B1-C1-C2-C3-C4. Vi kan skicka 100 på varje väg, och får ett maxflöde på 200. Minsnitt är över (A1,A2) och (A1,B1), eller över (B3,B4) och (C3,C4), eller över (B4,C4) och (C3,C4).

För att öka maxflöde måste vi öka kapaciteten på (A1,A2) eller (A1,B1) samt (C3,C4). (Det ger inte ingen förbättring att öka övre gränsen för (B3,B4) eller (B4,C4).) Jag väljer (A1,B1) och (C3,C4).

Maximal flödesökande väg (funnen med Dijkstras metod): (t.ex.) A1-B1-B2-B3-C3-C4, kapacitet: 50. Skicka 50 enheter. Därefter fås minsnitt kring nod A1 (eller C4).

1f: Reducerad kostnad: $\hat{c}_{B2,B3} = c_{B2,B3} + y_{B2} - y_{B3} = 4 + 14 - 21 = -3 < 0$. Ja, billigaste vägen kommer att ändras.

Uppgift 2

2a: Man söker ett billigaste uppspännande träd. Använd Kruskals eller Prims metod. Totalkostnad: 59.

2b: Man söker nu ett billigaste 1-träd. Använd Kruskals eller Prims metod. Totalkostnad: 67.

2c: Ett handelsresandeproblem verkar ju bra, eftersom alla noder är förbundna på två olika sätt i varje tillåten lösningen till problemet. Svårigheten är dock att det inte finns någon tillåten lösning, dvs. det finns ingen Hamiltoncykel i grafen. (Varje heuristik kommer att fallera.)

Möjlig ändring: Tillåt återbesök. Men det kan betyda att en viss nod får valens ett, och det betyder att noden inte får önskad säkerhet.

Annan möjlig ändring: Kräv att varje nod får *minst* valens två. Då kan noder få valens tre, vilket kan ses som onödigt hög säkerhet. (Men jag tycker att detta är det bästa alternativet.) Dock måste vi modifiera metoderna för handelsresandeproblem något för att kunna lösa problemet. Det finns en (bra) sådan lösning med kostnad 77.

2d: $z^a \leq z^b \leq z^c$. Lösningarna i uppgift a och b är relaxationer av problemet i c, och ger därför undre gränser. En tillåten lösning ger en övre gräns. Man kan lösa problemet med trädsökning och förgrening genom att använda dessa gränser.

2e: Problemet är ett kinesiskt brevbärarproblem, där man ska köra i varje korridor minst en gång. Noderna A2, B1, C2 och C3 har udda valens, så det finns ingen Eulertur, dvs. en tur som passerar varje båge exakt en gång. Det billigaste sättet att öka valenserna för dessa noder är att duplicera bågarna (A1,A2), (A1,B1) samt (C2,C3). Det är alltså dessa korridorer som ska köras två gånger.

Uppgift 3

3a: Låt x_1 vara antalet studenter på Å-linjen, x_2 antalet studenter på Ä-linjen och x_3 antalet studenter på Ö-linjen. Problemet blir då

$$
\begin{array}{lrcrcrcrcl}
\max & z = & 4x_1 & + & 3x_2 & + & 2x_3 & & \\
\text{då} & & x_1 & + & x_2 & + & x_3 & \leq & 200 \\
 & & x_1 & & & & & \leq & 100 \\
 & & & & x_2 & & & \leq & 150 \\
 & & x_1 & , & x_2 & , & x_3 & \geq & 0
\end{array}
$$

Inför slackvariabler x_4, x_5 och x_6. Starta med slackvariablerna i basen.

Bas	z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	$\hat{b}$
z	1	-4	-3	-2	0	0	0	0
x_4	0	1	1	1	1	0	0	200
x_5	0	1	0	0	0	1	0	100
x_6	0	0	1	0	0	0	1	150

Först blir x_1 inkommande och x_5 utgående.

Bas	z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	$\hat{b}$
z	1	0	-3	-2	0	4	0	400
x_4	0	0	1	1	1	-1	0	100
x_1	0	1	0	0	0	1	0	100
x_6	0	0	1	0	0	0	1	150

Sedan blir x_2 inkommande och x_4 utgående.

Bas	z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	$\hat{b}$
z	1	0	0	1	3	1	0	700
x_2	0	0	1	1	1	-1	0	100
x_1	0	1	0	0	0	1	0	100
x_6	0	0	0	-1	-1	1	1	50

Därefter fås optimum. $x_1 = 100$, $x_2 = 100$, $x_3 = 0$, ($x_4 = 0$, $x_5 = 0$, $x_6 = 50$) och $z = 700$. Svar: Ta in 100 studenter på Å-linjen och 100 på Ä-linjen, men inga på Ö-linjen. Detta ger vinsten 700.

3b: Skuggpriserna är $y_1 = 3$, $y_2 = 1$ och $y_3 = 0$. Att satsa på första bivillkoret, dvs. öka totala antalet studenter, ger bäst utbyte (vinst 3 per extra plats).

3c: Reducerad kostnad är $\hat{c}_3 = -1$, så en enhets ökning av x_3 ger en enhets minskning av vinsten.

3d: Den nya reducerade kostnaden blir $\hat{c}_3 = 1$, så x_3 blir inkommande. När man gör pivoteringen (vilket direkt leder till optimum), fås dock x_2 som utgående variabel, så vi får fortfarande inte studenter på alla tre program.

3e: Reducerad kostnad för den nya variabeln, x_Z, blir $\hat{c}_Z = c_Z - a_Z^T y$, där y är den optimala duallösningen, som läses ut ur optimaltablån: $y = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ och $a_Z = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$,
Vi får $\hat{c}_Z = c_Z - 3$, så x_Z blir inkommande om $c_Z > 3$. Svar: Minst vinsten 3.

Uppgift 4

P0: Grafisk lösning ger $x_1 = 3$, $x_2 = 8/3 \approx 2.33$ och $z = 20$, vilket ger $\bar{z} = 20$.
Förgrena över x_2: P1 = P0 + ($x_2 \leq 2$), P2 = P0 + ($x_2 \geq 3$).
Jag väljer att gå ner i $\leq$-grenen först.
P1: Grafisk lösning: $x_1 = 3$, $x_2 = 2$, $z = 18$. Tillåten heltalslösning: $\underline{z} = 18$. Kapa.
P2: Grafisk lösning ger $x_1 = 2.5$, $x_2 = 3$, $z = 19$, vilket ger $\bar{z} = 19$.
Förgrena över x_1: P3 = P1 + ($x_1 \leq 2$), P4 = P1 + ($x_1 \geq 3$).
P3: Grafisk lösning ger $x_1 = 2$, $x_2 = 10/3 \approx 3.33$, $z = 18$, vilket ger $\bar{z} = 18$. Kapa, ty $\bar{z} = \underline{z} = 18$.

P4: Tillåten lösning saknas. Kapa.
Trädet avsökt. Bästa lösning $x_1 = 3$, $x_2 = 2$, med $z = 18$.
Svar i ord: Ta in tre klasser på Å-linjen och 2 på Ä-linjen. Detta ger en vinst på 18.

Uppgift 5

5a: Problemet skrivet i standardform är:

$$\begin{array}{rl} \min & f(x) = x_1^2 + 2x_2^2 - 300x_1 - 400x_2 + x_1x_2 \\ \text{då} & g_1(x) = x_1 + x_2 - 200 \leq 0 \\ & g_2(x) = x_1 - 100 \leq 0 \\ & g_3(x) = x_2 - 150 \leq 0 \\ & g_4(x) = -x_1 \leq 0 \\ & g_5(x) = -x_2 \leq 0 \end{array}$$

Vi har $\nabla f(x) = \begin{pmatrix} 2x_1 - 300 + x_2 \\ 4x_2 - 400 + x_1 \end{pmatrix}$, $\nabla g_1(x) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\nabla g_2(x) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$,
$\nabla g_3(x) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\nabla g_4(x) = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\nabla g_5(x) = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$.

För punkten A:
KKT1: Punkten är tillåten.
KKT2: Bivillkor 3, 4 och 5 är inte aktiva, så $u_3 = 0$, $u_4 = 0$ och $u_5 = 0$.
KKT3: $\begin{pmatrix} 0 \\ 100 \end{pmatrix} + u_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + u_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. Lösningen är $u_1 = -100$, $u_2 = 100$, vilket inte uppfyller KKT4, så A är inte en KKT-punkt.

För punkten B:
KKT1: Punkten är tillåten.
KKT2: Bivillkor 2, 4 och 5 är inte aktiva, så $u_2 = 0$, $u_4 = 0$ och $u_5 = 0$.
KKT3: $\begin{pmatrix} -50 \\ 250 \end{pmatrix} + u_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + u_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. Lösningen är $u_1 = 50$, $u_3 = -300$, vilket inte uppfyller KKT4, så B är inte en KKT-punkt.

Detta betyder att ingen av dessa lösningar är optimal.

5b: I startpunkten är bivillkor 1 och 2 aktiva. Första LP-problemet blir

min $z = 100d_2$ då $d_1 + d_2 \leq 0$, $d_1 \leq 0$, samt $-1 \leq d \leq 1$,

vilket har optimallösning $d = (0, -1)$ med $z = -100$. Sätt $x^{(2)} = (100, 100 - t)$. Maximal steglängd blir 100 pga. bivillkoret $x_2 \geq 0$. Linjesökning ger $t = 25$, så vi får $x^{(2)} = (100, 75)$.

Aktivt bivillkor är nu bara 2. LP-problemet blir

min $z = -25d_1$ då $d_1 \leq 0$, samt $-1 \leq d \leq 1$, vilket har optimallösning med $z = 0$ (t.ex. $d = (0, 0)$). Alltså är $x^{(2)} = (100, 75)$ optimal. Svar i ord: Ta in 100 studenter på Å-linjen och 75 på Ä-linjen.