Tekniska Högskolan i Linköping
Matematiska Institutionen
Optimeringslära
Kaj Holmberg

Optimering för ingenjörer
Lösning till tentamen
2014-08-29

Lösningar

Uppgift 1

1a:

P1:
$$\begin{array}{rl} \max & 2x_1^2 + 3x_1 + 4x_2 \\ \text{då} & -x_1 + x_2^2 \le 5 \\ & x_1 + x_2 \le 3 \\ & x_1, x_2 \ge 0 \end{array}$$

P2:
$$\begin{array}{rl} \max & -x_1 + x_2^2 \\ \text{då} & 3x_1 + 5x_2 \ge 4 \\ & x_1 + x_2 \le 4 \\ & x_1, x_2 \ge 0 \end{array}$$

P3:
$$\begin{array}{rl} \max & 3x_1 + 5x_2 \\ \text{då} & x_1 + 3x_2 \le 3 \\ & x_1 + x_2 \le 5 \\ & x_1, x_2 \ge 0 \end{array}$$

P4:
$$\begin{array}{rl} \min & -x_1 + x_2^2 \\ \text{då} & 3x_1 + 5x_2 \ge 3 \\ & x_1 + 3x_2 \le 2 \\ & x_1 + x_2 \le 3 \\ & x_1, x_2 \ge 0 \end{array}$$

P3 är linjärt, medan P1, P2 och P4 är olinjära.

P3 och P4 är konvexa, medan P1 och P2 är ickekonvexa. (Alla tillåtna områden är konvexa och alla målfunktioner är konvexa. Tyvärr ska vi maximera i P1 och P2.)

1b: Inför slackvariabler x_3 och x_4. Starta med slackvariablerna i basen.

Bas	z	x_1	x_2	x_3	x_4	$\hat{b}$
z	1	-3	-5	0	0	0
x_3	0	1	3	1	0	3
x_4	0	1	1	0	1	5

Först blir x_2 inkommande och x_3 utgående.

Bas	z	x_1	x_2	x_3	x_4	$\hat{b}$
z	1	-4/3	0	5/3	0	5
x_2	0	1/3	1	1/3	0	1
x_4	0	2/3	0	-1/3	1	4

Sedan blir x_1 inkommande och x_2 utgående.

Bas	z	x_1	x_2	x_3	x_4	$\hat{b}$
z	1	0	4	3	0	9
x_1	0	1	3	1	0	3
x_4	0	0	-2	-1	1	2

Därefter fås optimum. $x_1 = 3$, $x_2 = 0$, ($x_3 = 0$, $x_4 = 2$) och $z = 9$. Svar: Använd 3 g ved och ingen halm. Detta ger ythårdhet 9, porositet 3 och tyngd 3. (Det sista bivillkoret är alltså inte aktivt.) F.ö. fås blankhet 21 och mjukhet 2.

Metoden går inte kortaste vägen från startpunkten till optimum.

1c: Skuggpriserna är $y_1 = 3$ och $y_2 = 0$. Om tillåten porositet ökar till 4 (dvs. högerledet i första bivillkoret ökar från 3 till 4), ökar målfunktionsvärdet med 3.

1d: Halm (x_2) har reducerad kostnad $\hat{c}_2 = -4$, så en enhets ökning av c_2 ger $\hat{c}_2 = -3$, vilket inte ändrar lösningen alls. Detta gäller upp till 4 enheters ökning (då vi får $\hat{c}_2 = 0$). För större ökning, fås x_2 som inkommande variabel (och x_1 som utgående).

1e: (Standard.) Duallösningen är $y_1 = 3$ och $y_2 = 0$.

1f: Vi får alltså $c_3 = 2$ och $a_3 = (1, 1)^T$, så reducerade kostnaden blir $\hat{c}_3 = 2 - 3 = -1 < 0$. Nej, att använda gamla tidningar förbättrar inte lösningen.

1g: Lösningen $x_1 = 3$ och $x_2 = 0$ är tillåten i P1 och P2 men inte i P4. Den är en extrempunkt i P1 och P3, men inte i P2.

Uppgift 2

2a: Problemet skrivet i standardform är:

$$\begin{array}{rl} \min & f(x) = -2x_1^2 - 3x_1 - 4x_2 \\ \text{då} & g_1(x) = -x_1 + x_2^2 - 5 \leq 0 \\ & g_2(x) = x_1 + x_2 - 3 \leq 0 \\ & g_3(x) = -x_1 \leq 0 \\ & g_4(x) = -x_2 \leq 0 \end{array}$$

Vi har $\nabla f(x) = \begin{pmatrix} -4x_1 - 3 \\ -4 \end{pmatrix}$, $\nabla g_1(x) = \begin{pmatrix} -1 \\ 2x_2 \end{pmatrix}$, $\nabla g_2(x) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\nabla g_3(x) = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\nabla g_4(x) = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$.

För punkten A ($x_1 = 0, x_2 = 3$):
KKT1: Punkten är ej tillåten.
A är inte en KKT-punkt.

För punkten B ($x_1 = 3, x_2 = 0$):
KKT1: Punkten är tillåten.
KKT2: Bivillkor 1 och 3 är inte aktiva, så $u_1 = 0$ och $u_3 = 0$.
KKT3: $\begin{pmatrix} -15 \\ -4 \end{pmatrix} + u_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + u_4 \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. Lösningen är $u_2 = 15$ och $u_4 = 4$, vilket uppfyller KKT4, så B är en KKT-punkt.

För punkten C:

KKT1: Punkten är tillåten.
KKT2: Bivillkor 3 och 4 är inte aktiva, så $u_1 = 0$ och $u_2 = 0$.
KKT3: $\begin{pmatrix} -3 \\ -4 \end{pmatrix} + u_3 \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} + u_4 \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. Lösningen är $u_3 = -3$ och $u_4 = -4$, vilket inte uppfyller KKT4, så C är inte en KKT-punkt.

Problemet är inte konvext, så vi vet inte säkert att punkt B är optimal (men jag tror att den är det).

2b: I startpunkten är bivillkor 1 samt $x_2 \geq 0$ aktiva. Första LP-problemet blir

min $z = -d_1$ då $3d_1 + 5d_2 \geq 0$, $d_2 \geq 0$, samt $-1 \leq d \leq 1$,

vilket har optimallösning $d = (1, 0)$ med $z = -1$. Sätt $x^{(2)} = (1 + t, 0)$. Maximal steglängd blir 1 pga. bivillkor 2. Linjesökning ger att vi vill öka t så mycket som möjligt, så vi får $t = 1$ och $x^{(2)} = (2, 0)$.

Aktiva bivillkor är nu 2 samt $x_2 \geq 0$. LP-problemet blir

min $z = -d_1$ då $d_1 + 3d_2 \geq 0$, $d_2 \geq 0$, samt $-1 \leq d \leq 1$,

vilket har optimallösning med $z = 0$ (t.ex. $d = (0, 0)$). Alltså är $x^{(2)} = (2, 0)$ optimal. Svar i ord: Använd 2 g ved, ingen halm.

Uppgift 3

3a: Den givna startlösningen är tillåten och ger basbågarna (7,2), (2,3), (1,3), (3,4), (3,5) och (3,6). Detta ger nodpriserna $y_7 = 0$, $y_2 = 0$, $y_3 = 8$, $y_1 = 1$, $y_4 = 14$, $y_5 = 18$, $y_6 = 18$, och följande reducerade kostnader: $\hat{c}_{71} = -1 < 0$ (optimalt), $\hat{c}_{12} = 5 > 0$ (optimalt), $\hat{c}_{14} = -4 < 0$ (optimalt), $\hat{c}_{26} = -2 < 0$ (optimalt), $\hat{c}_{54} = 10 > 0$ (optimalt), $\hat{c}_{56} = 8 > 0$ (optimalt). Lösningen är optimal.

3b: Nu får vi $y_6 = 15$, och $\hat{c}_{26} = 1 < 0$ (ej optimalt, minska), $\hat{c}_{56} = 11 > 0$ (optimalt). Detta ger x_{26} som inkommande variabel (att minska). Cykeln blir 6-2-3-6, ändringen blir 2 enheter, och utgående variabel blir x_{26}.

Nu fås samma nodpriser och $\hat{c}_{26} = 1 < 0$ (optimalt), så lösningen är optimal.

3c: Lösningen till uppgift a gav nodpriser $y_4 = 14$ och $y_6 = 18$, så reducerade kostnad för båge (4,6) blir $\hat{c}_{46} = 14 + c_{46} - 18 = c_{46} - 4$, vilket blir mindre än noll om $c_{46} < 4$. Vi kan därför bara acceptera förslaget om kostanden blir mindre än 4 per bunt.

Uppgift 4

4a: Kör Dijkstras metod *en gång* med 1 som startnod. Alla noder som får ett nodpris är uppnådda. Detta ger följande tider (nodpriser) i minuter: 1: 0, 2: 5, 3: 6, 4: 10, 5: 12 och 6: 18.

4b: Nodpriserna är $y_5 = 12$ och $y_3 = 6$, Om man lägger till båge (3,5) med kostnad 8, fås ingen förbättring, ty $y_3 + c_{35} = 12 + 8 = 20 > 12$. Det hjälper alltså inte.

4c: Första maximala flödesökande väg (funnen med Dijkstras metod) blir 1-2-5-6, med kapaciteten 5. Skicka 5 enheter, och ändra tillåtna riktningar.

Nästa maximala flödesökande väg (även den funnen med Dijkstras metod) blir 1-3-4-6, med kapaciteten 4. Skicka 4 enheter, och ändra tillåtna riktningar.

När vi nästa gång söker flödesökande väg, når vi bara nod 1 och 3, så minsnittet går mellan dessa noder och de övriga.

Uppgift 5

Problemet som ska lösas är

$$\begin{array}{rl} \min & 20x_1 + 24x_2 \\ \text{då} & x_1 + x_2 \geq 3 \\ & 6x_1 + 12x_2 \leq 25 \\ & x_1, x_2 \geq 0, \text{ heltal} \end{array}$$

P0: Grafisk lösning ger $x_1 = 3$, $x_2 = 0$ och $z = 60$, vilket ger $\underline{z} = 20$.
Den uppmärksamma lösaren ser att denna lösning är heltal, vilket ger $\bar{z} = 20$, och problemet är löst. Svar: Köp tre maskiner av sort 1.

(Det är möjligt att examinator här tänkte sig att av någon anledning maximera kostnaderna. I så fall fås följande mer intressanta lösningsgång.

P0: Grafisk lösning ger $x_1 = 25/6 \approx 4.167$, $x_2 = 0$ och $z = 250/3 \approx 83.33$, vilket ger $\bar{z} = 83$. (Ev: Avrundning neråt ger tillåten lösning $x_1 = 4$, $x_2 = 0$, samt $\underline{z} = 80$.)

Förgrena över x_1: P1 = P0 + ($x_1 \leq 4$), P2 = P0 + ($x_1 \geq 5$).
Jag väljer att gå ner i $\leq$-grenen först.
P1: Grafisk lösning: $x_1 = 4$, $x_2 = 1/12 \approx 0.0833$, $z = 82$.

Förgrena över x_2: P3 = P1 + ($x_2 \leq 0$), P4 = P1 + ($x_2 \geq 1$).
P3: Grafisk lösning ger $x_1 = 4$, $x_2 = 0$, $z = 80$, vilket ger $\underline{z} = 80$. Kapa, ty heltal.

P4: Tillåten lösning saknas. Kapa.

P2: Tillåten lösning saknas. Kapa.

Trädet avsökt. Bästa lösning $x_1 = 4$, $x_2 = 0$, med $z = 80$.
Svar i ord: Köp 4 maskiner av sort 1.

Men så stod det alltså inte i problemet.)

Uppgift 6

Efter första steget fås $\alpha = (8, 7, 5, 4)$ och $\beta = (0, 0, 1, 0)$. Man kan stryka alla nollor genom att stryka rad 3 och 4 samt kolumn 4, vilket gör att vi får $\alpha = (9, 8, 5, 4)$ och $\beta = (0, 0, 1, -1)$. Nu fås lösningen att Anton gör uppgift 1, Beatrice uppgift 4, Carl uppgift 3 och Doris uppgift 2. Total tid blir 26.