Tekniska Högskolan i Linköping
Matematiska Institutionen
Optimeringslära
Kaj Holmberg

Optimering för ingenjörer
Lösning till tentamen
2014-10-21

# Lösningar

## Uppgift 1

**1a:**
Inför slackvariabler $x_3$, $x_4$ och $x_5$. Starta med slackvariablerna i basen.

| Bas | $z$ | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $x_4$ | $x_5$ | $\hat{b}$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $z$ | 1 | -7 | -8 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| $x_3$ | 0 | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 | 2 |
| $x_4$ | 0 | 4 | 5 | 0 | 1 | 0 | 10 |
| $x_5$ | 0 | 6 | 3 | 0 | 0 | 1 | 12 |

Först blir $x_2$ inkommande och $x_3$ utgående. (Man kunde alternativt ha valt $x_4$ som utgående.)

| Bas | $z$ | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $x_4$ | $x_5$ | $\hat{b}$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $z$ | 1 | 1 | 0 | 8 | 0 | 0 | 16 |
| $x_2$ | 0 | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 | 2 |
| $x_4$ | 0 | -1 | 0 | -5 | 1 | 0 | 0 |
| $x_5$ | 0 | 3 | 0 | -3 | 0 | 1 | 6 |

Därefter fås optimum. $x_1 = 0$, $x_2 = 2$, ($x_3 = 0$, $x_4 = 0$, $x_5 = 6$) och $z = 16$. Svar: Använd två dygn till kurs 2. Det blir häftklamrar över, men pappret går åt.

**1b:** Välj istället $x_2$ inkommande och $x_4$ utgående i första iterationen.

| Bas | $z$ | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $x_4$ | $x_5$ | $\hat{b}$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $z$ | 1 | -3/5 | 0 | 0 | 8/5 | 0 | 16 |
| $x_3$ | 0 | 1/5 | 0 | 1 | -1/5 | 0 | 0 |
| $x_2$ | 0 | 4/5 | 1 | 0 | 1/5 | 0 | 2 |
| $x_5$ | 0 | 18/5 | 0 | 0 | -3/5 | 1 | 6 |

Tablån indikerar inte optimalitet. Välj $x_1$ som inkommande variabel och $x_3$ som utgående. (En degenererad pivotering, där inkommande variabel blir noll.)

| Bas | $z$ | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $x_4$ | $x_5$ | $\hat{b}$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $z$ | 1 | 0 | 0 | 3 | 1 | 0 | 16 |
| $x_1$ | 0 | 1 | 0 | 5 | -1 | 0 | 0 |
| $x_2$ | 0 | 0 | 1 | -4 | 1 | 0 | 2 |
| $x_5$ | 0 | 0 | 0 | -18 | -3 | 1 | 6 |

Nu indikerar tablån optimalitet. $x_1 = 0$, $x_2 = 2$, ($x_3 = 0$, $x_4 = 0$, $x_5 = 6$) och $z = 16$. Samma lösning som i uppgift a, men inte samma baslösning. Man kan inte med normal pivotering komma till baslösningen i uppgift a.

**1c:** Skuggpriserna från uppgift a är $y_1 = 8$, $y_2 = 0$ och $y_3 = 0$. En liten ökning av högerledet i bivillkor 2 tycks inte ge någon effekt. Skuggpriserna från uppgift b är $y_1 = 3$, $y_2 = 1$ och $y_3 = 0$, så där tycks en liten ökning av högerledet i bivillkor 2 ge lika stor ökning av optimala målfunktionsvärdet. Skillnaden beror på att man i baslösningen i uppgift b anser att bivillkor 2 är aktivt.

**1d:** (LP-dualen är standard.) Duallösningarna är $y_1 = 8$, $y_2 = 0$ och $y_3 = 0$, samt $y_1 = 3$, $y_2 = 1$ och $y_3 = 0$. Båda är tillåtna (vilket stämmer med att båda indikerar optimalitet).

## Uppgift 2

**2a:** Problemet skrivet i standardform är:

$$\begin{array}{rl} \min & f(x) = (x_1 - 3)^2 + 2(x_2 - 4)^2 \\ \text{då} & g_1(x) = x_1 + x_2 - 4 \leq 0 \\ & g_2(x) = x_1 - 4 \leq 0 \\ & g_3(x) = x_2 - 4 \leq 0 \\ & g_4(x) = -x_1 \leq 0 \\ & g_5(x) = -x_2 \leq 0 \end{array}$$

Vi har $\nabla f(x) = \begin{pmatrix} 2(x_1 - 3) \\ 4(x_2 - 4) \end{pmatrix}$, $\nabla g_1(x) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\nabla g_2(x) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$,
$\nabla g_3(x) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$,
$\nabla g_4(x) = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\nabla g_5(x) = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$.

För punkten A $(x_1 = 2, x_2 = 2)$:
KKT1: Punkten är tillåten.
KKT2: Bara bivillkor 1 är aktivt, så $u_2 = 0$, $u_3 = 0$, $u_4 = 0$ och $u_5 = 0$.
KKT3: $\begin{pmatrix} -2 \\ -8 \end{pmatrix} + u_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. Eftersom man inte kan ha både $u_1 = 2$ och $u_1 = 8$, saknar KKT3 tillåten lösning, så A är inte en KKT-punkt.

För punkten B $(x_1 = 0, x_2 = 4)$:
KKT1: Punkten är tillåten.
KKT2: Bivillkor 2 och 5 är inte aktiva, så $u_2 = 0$ och $u_5 = 0$.
KKT3: $\begin{pmatrix} -6 \\ 0 \end{pmatrix} + u_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + u_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + u_4 \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. Detta ger $u_1 - u_4 = 6$ och $u_1 + u_3 = 0$. Enda chansen att $u_1 \geq 0$ och $u_3 \geq 0$ är att båda blir noll, men då fås $u_4 = -6 < 0$. Punkt B är därför inte en KKT-punkt.

För punkten C $(x_1 = 4, x_2 = 0)$:
KKT1: Punkten är tillåten.
KKT2: Bivillkor 3 och 4 är inte aktiva, så $u_3 = 0$ och $u_4 = 0$.
KKT3: $\begin{pmatrix} 2 \\ -16 \end{pmatrix} + u_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + u_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + u_5 \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. Detta ger $u_1 + u_2 = -2$ och $u_1 - u_5 = 16$. Den första ekvationen omöjliggör att både $u_1$ och $u_2$ är ickenegativa, så C är inte en KKT-punkt.

**2b:** I startpunkten är bivillkor 4 och 5 aktiva. Första LP-problemet blir min $z = -6d_1 - 16d_2$ då $d_1 \geq 0$, $d_2 \geq 0$, samt $-1 \leq d \leq 1$,

vilket har optimallösning $d = (1, 1)$ med $z = -22$. Sätt $x^{(2)} = (t, t)$. Maximal steglängd blir 2 pga. bivillkor 1. Linjesökning ger att vi vill sätta $t = 3.66$, så vi får $t = 2$ och $x^{(2)} = (2, 2)$.

Nu är bara bivillkor 1 aktivt. LP-problemet blir

min $z = -2d_1 - 8d_2$ då $d_1 + d_2 \leq 0$, samt $-1 \leq d \leq 1$,

vilket har optimallösning $d = (-1, 1)$ med $z = -6$. Sätt $x^{(2)} = (2 - t, 2 + t)$. Maximal steglängd blir 2 pga. bivillkor 2 (och 4). Linjesökning ger att vi sätter $t = 1$, så vi får $x^{(2)} = (1, 3)$.

Nu är bara bivillkor 1 aktivt. LP-problemet blir

min $z = -4d_1 - 4d_2$ då $d_1 + d_2 \leq 0$, samt $-1 \leq d \leq 1$,

vilket har optimallösning med $z = 0$ (t.ex. $d = (0, 0)$). Alltså är $x^{(2)} = (1, 3)$ optimal.

## Uppgift 3

**3a:** Den givna startlösningen är tillåten och ger basbågarna (1,2), (2,5), (3,5) och (3,6) samt någon båge som går till nod 4, t.ex. (1,4). Detta ger nodpriserna $y_1 = 0$, $y_2 = 6$, $y_3 = 6$, $y_4 = 6$, $y_5 = 12$, $y_6 = 12$, och följande reducerade kostnader: $\hat{c}_{13} = -2 < 0$ (optimalt), $\hat{c}_{23} = 4 > 0$ (optimalt), $\hat{c}_{43} = 3 > 0$ (optimalt), $\hat{c}_{46} = -1 < 0$ (ej optimalt, öka), $\hat{c}_{56} = 3 > 0$ (optimalt). Detta ger $x_{46}$ som inkommande variabel (att öka). Cykeln blir 4-6-3-5-2-1-4, ändringen blir 2 enheter, och utgående variabel blir $x_{12}$ (eller $x_{25}$).

Nu fås nodpriserna $y_1 = 0$, $y_2 = 5$, $y_3 = 5$, $y_4 = 5$, $y_5 = 11$, $y_6 = 11$, och följande reducerade kostnader: $\hat{c}_{12} = 1 > 0$ (optimalt), $\hat{c}_{13} = -1 < 0$ (optimalt), $\hat{c}_{23} = 4 > 0$ (optimalt), $\hat{c}_{43} = 3 > 0$ (optimalt), $\hat{c}_{56} = 3 > 0$ (optimalt). Nu är lösningen optimal.

## Uppgift 4

**4a:** Kör Fords metod (ty negativa kostnader), vilket ger vägen 1-2-5-6, med kostnad 9.

**4b:** Nodpriserna är $y_3 = 5$ och $y_2 = 7$, så $\hat{c}_{32} = c_{32} + 5 - 7 = c_{32} - 2 < 0$ om $c_{32} < 2$.

## Uppgift 5

Första maximala flödesökande väg (funnen med Dijkstras metod) blir 1-4-6, med kapaciteten 2. Skicka 2 enheter, och ändra tillåtna riktningar.

Nästa maximala flödesökande väg (även den funnen med Dijkstras metod) blir 1-2-3-4-6, med kapaciteten 1. Skicka en enhet, och ändra tillåtna riktningar.

När vi nästa gång söker flödesökande väg, når vi bara nod 1, 2, 3 och 5, så minsnittet går mellan dessa noder och noderna 4 och 6.

## Uppgift 6

P0: Grafisk lösning ger $x_1 = 4/3$, $x_2 = 5/6$ och $z = 45$, vilket ger $\bar{z} = 45$.

Förgrena över $x_1$: P1 = P0 + ($x_1 \leq 1$), P2 = P0 + ($x_1 \geq 2$).
Jag väljer att gå ner i $\leq$-grenen först.
P1: Grafisk lösning: $x_1 = 1$, $x_2 = 1$, $z = 42$. Heltalig lösning, spara, kapa och notera $\underline{z} = 42$.

P2: Grafisk lösning ger $x_1 = 2$, $x_2 = 0$, $z = 40$, vilket ger $\bar{z} = 40$. Kapa, ty för dåligt.

Trädet avsökt. Bästa lösning $x_1 = 1$, $x_2 = 1$, med $z = 42$.
Svar i ord: Köp en maskin av varje sort.

## Uppgift 7

**7a:** Närmaste-granne ger faktiskt en tillåten lösning, med kostnaden 50. Billigaste 1-träd kostar 44, så vi har en övre gräns på 50 och en undre på 44.

**7b:** Kruskals eller Prims metod ger ett träd som kostar 36.

## Uppgift 8

Efter första steget fås $\alpha = (1, 2, 3, 4.5)$ och $\beta = (0, 1, 10, 11, 20)$. Man kan stryka alla nollor genom att stryka rad 5 samt kolumnerna 1, 3 och 5, vilket gör att vi får $\alpha = (3, 4, 5, 6, 5)$ och $\beta = (-2, 0, 8, 11, 18)$. Nu fås (t.ex.) lösningen $x_{11} = 1$, $x_{23} = 1$, $x_{35} = 1$, $x_{44} = 1$, $x_{52} = 1$. Total kostnad blir 59.

## Uppgift 9

**9a:** Sortering av kvoterna ger $x_5$ bäst, sätt $x_5 = 1$, vilket ger 9 kvar av högerledet. Näst bäst är $x_1$, så $x_1 = 1$, vilket ger 5 kvar av högerledet. Sedan kommer $x_4$, men nu blir kappsäcken full, och vi får $x_4 = 5/6$. Målfunktionsvärdet blir ung 20.8, vilket ger $\bar{z} = 20$.

Avrundning neråt av denna lösning ger $x_1 = 1$ och $x_5 = 1$, och resten lika med noll, vilket ger $\underline{z} = 15$.

**9b:** En minimal övertäckning ges av $x_1$, $x_4$ och $x_5$ (ty $4 + 6 + 4 = 14 > 13$), så vi får bivillkoret $x_1 + x_4 + x_5 \leq 2$, vilket ju skär bort ovanstående LP-lösning.