Tekniska Högskolan i Linköping
Matematiska Institutionen
Optimeringslära
Kaj Holmberg

Optimering för ingenjörer
Lösning till tentamen
2015-01-10

Lösningar

Uppgift 1

1a:
Inför slackvariabler x_5 och x_6. Starta med slackvariablerna i basen.

Bas	z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	$\hat{b}$
z	1	-2	2	-3	1	0	0	0
x_5	0	1	2	-1	3	1	0	3
x_6	0	4	2	2	-1	0	1	4

Först blir x_3 inkommande och x_6 utgående.

Bas	z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	$\hat{b}$
z	1	4	5	0	-1/2	0	3/2	6
x_5	0	3	3	0	5/2	1	1/2	5
x_3	0	2	1	1	-1/2	0	1/2	2

Nu blir x_4 inkommande och x_5 utgående.

Bas	z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	$\hat{b}$
z	1	23/5	28/5	0	0	1/5	8/5	7
x_4	0	6/5	6/5	0	1	2/5	1/5	2
x_3	0	13/5	8/5	1	0	1/5	3/5	3

Därefter fås optimum. $x_1 = 0$, $x_2 = 0$, $x_3 = 3$, $x_4 = 2$, ($x_5 = 0$, $x_6 = 0$) och $z = 7$.
Svar: Gör 2 ton av produkt 3 och 3 ton av produkt 4. Båda råvarorna går åt.

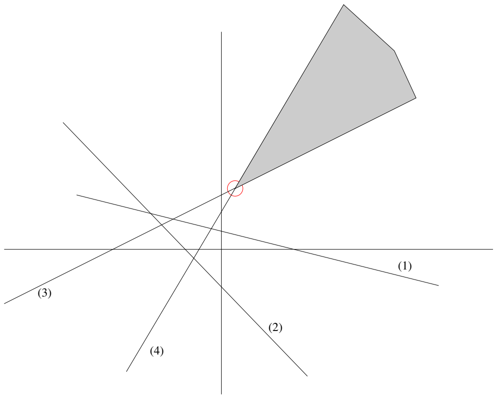
1b: Starta från starttablån ovan. Först blir x_2 inkommande och x_5 utgående.

Bas	z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	$\hat{b}$
z	1	-3	0	-2	-2	-1	0	-3
x_5	0	1/2	1	-1/2	1/2	1/2	0	3/2
x_3	0	3	0	3	-4	-1	1	1

Därefter fås optimum. $x_1 = 0$, $x_2 = 1.5$, $x_3 = 0$, $x_4 = 0$, ($x_5 = 0$, $x_6 = 1$) och $z = -3$.
Svar: Gör 1.5 ton av produkt 1. Råvara 1 går åt.

1c: LP-dual:

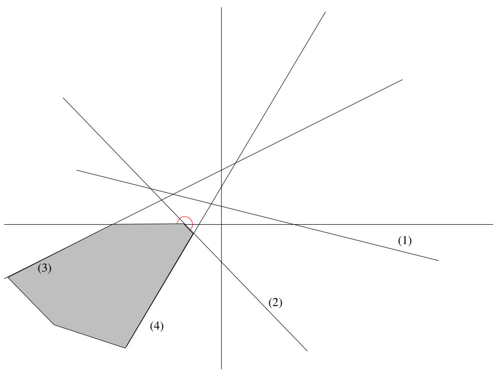
$$
\begin{array}{llrcrcrr}
\min & v = & 3y_1 & + & 4y_2 & & & \\
\text{då} & & y_1 & + & 4y_2 & \geq & 2 & (1) \\
& & 2y_1 & + & 2y_2 & \geq & -2 & (2) \\
& & -y_1 & + & 2y_2 & \geq & 3 & (3) \\
& & 3y_1 & - & y_2 & \geq & -1 & (2) \\
& & y_1, & & y_2 & \geq & 0 &
\end{array}
$$



Optimal duallösning: $y_1 = 0.2$, $y_2 = 1.6$ och $v = 7$ (vilket stämmer med optimaltablån i uppgift a).

1d: LP-dual:

$$
\begin{array}{llrcrcrr}
\max & v = & 3y_1 & + & 4y_2 & & & \\
\text{då} & & y_1 & + & 4y_2 & \leq & 2 & (1) \\
& & 2y_1 & + & 2y_2 & \leq & -2 & (2) \\
& & -y_1 & + & 2y_2 & \leq & 3 & (3) \\
& & 3y_1 & - & y_2 & \leq & -1 & (2) \\
& & y_1, & & y_2 & \leq & 0 &
\end{array}
$$



Optimal duallösning: $y_1 = -1$, $y_2 = 0$ och $v = -3$ (vilket stämmer med optimaltablån i uppgift b).

1e: Ny variabel, x_7, får reducerad kostnad $\hat{c}_7 = c_7 - a_7^T y = 3 - 2y_1 - y_2 = 3 - 2/5 - 8/5 = 1 > 0$. Ja, öka för max-problem.

Uppgift 2

2a: Skriv problemet på standardform. Vi får $\nabla f(x) = \begin{pmatrix} 4x_1 - 2x_2 - 2 \\ 6x_2 - 2x_1 - 1 \end{pmatrix}$, $\nabla g_1(x) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\nabla g_2(x) = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$, $\nabla g_3(x) = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Hörnpunkterna är: A: (0,0), B: (0,2), C: (1,1).
För punkt A: (0,0):
KKT1: Punkten är tillåten.
KKT2: Bivillkor 2 och 3 är aktiva, så $u_1 = 0$.
KKT3: $\begin{pmatrix} -2 \\ -1 \end{pmatrix} + u_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} + u_3 \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. Detta ger $u_2 = -1 < 0$ och $u_3 = -3 < 0$, så KKT4 är inte uppfyllt.

För punkt B: (0,2):
KKT1: Punkten är tillåten.
KKT2: Bivillkor 1 och 3 är aktiva, så $u_2 = 0$.
KKT3: $\begin{pmatrix} -6 \\ 11 \end{pmatrix} + u_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + u_3 \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. Detta ger $u_1 = -11 < 0$ och $u_3 = -17 < 0$, så KKT4 är inte uppfyllt.

För punkt C: (1,1):
KKT1: Punkten är tillåten.
KKT2: Bivillkor 1 och 2 är aktiva, så $u_3 = 0$.
KKT3: $\begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix} + u_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + u_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. Detta ger $u_1 = -1.5 < 0$ och $u_2 = 1.5$, så KKT4 är inte uppfyllt.

Ingen av hörnpunkterna är optimal (dvs. man tjänar på att gå in i det tillåtna området från varje hörnpunkt).

2b: I startpunkten är bivillkor 2 och 3 aktiva. Första LP-problemet blir

min $z = -2d_1 - d_2$ då $d_1 - d_2 \leq 0$, $d_1 \geq 0$, samt $-1 \leq d \leq 1$,

vilket har optimallösning $d = (1, 1)$ med $z = -3$. Sätt $x^{(2)} = (t, t)$. Maximal steglängd blir 1 pga. bivillkor 1. Linjesökning ger $t = 0.5$, så vi får $x^{(2)} = (0.5, 0.5)$.

Nu är bara bivillkor 2 aktivt. LP-problemet blir

min $z = -d_1 + d_2$ då $d_1 - d_2 \leq 0$, samt $-1 \leq d \leq 1$,

vilket har optimallösning $z = 0$ för t.ex. $d = (0, 0)$ (eller någon annan lösning med $d_1 = d_2$). Alltså är $x = (0.5, 0.5)$ optimal.

Uppgift 3

3a: Den givna startlösningen är tillåten och ger basbågarna (1,2), (1,5), (2,4), (3,7), (5,6) och (6,7). Detta ger nodpriserna $y_1 = 0$, $y_2 = 4$, $y_3 = 15$, $y_4 = 9$, $y_5 = 6$, $y_6 = 12$, $y_7 = 19$, och följande reducerade kostnader: $\hat{c}_{14} = -3 < 0$ (optimalt), $\hat{c}_{23} = -6 < 0$ (optimalt), $\hat{c}_{46} = 4 > 0$ (optimalt), $\hat{c}_{47} = -6 < 0$ (optimalt), $\hat{c}_{54} = 3 > 0$ (optimalt). Lösningen är alltså optimal.

3b: Vi får nu reducerade kostnad $\hat{c}_{54} = -1 < 0$ (ej optimalt, öka), vilket ger x_{54} som inkommande variabel (att öka). Cykeln blir 5-4-2-1-5, ändringen blir en enhet, och utgående variabel blir x_{24}.

Nu fås nodpriserna $y_1 = 0$, $y_2 = 4$, $y_3 = 15$, $y_4 = 8$, $y_5 = 6$, $y_6 = 12$, $y_7 = 19$, och följande reducerade kostnader: $\hat{c}_{14} = -2 < 0$ (optimalt), $\hat{c}_{23} = -6 < 0$ (optimalt), $\hat{c}_{24} = 1 > 0$ (optimalt), $\hat{c}_{46} = 3 > 0$ (optimalt), $\hat{c}_{47} = -8 < 0$ (optimalt). Nu är lösningen optimal.

3c: Första flödesökande väg (funnen med Dijkstras metod) blir t.ex. 1-5-6-7, med kapaciteten 4. Skicka 4 enheter. Efter detta saknas flödesökande väg, så maxflöde är funnet. Bara noderna 1, 2, 4, 5 och 6 blir uppnådda, så minsnitt går mellan dem och noderna 3 och 7.

Uppgift 4

4a: Kör Dijkstra en gång och nysta upp från nod 7 och nod 6. Detta ger vägen 1-2-5-7, med kostnad 17, samt vägen 1-3-4-6, med kostnad 13. Nodpriserna (duallösningen) är $y_1 = 0$, $y_2 = 6$, $y_3 = 5$, $y_4 = 8$, $y_5 = 10$, $y_6 = 13$, $y_7 = 17$, och passar givetvis till båda lösningarna.

4b: Eftersom startnoden är ändrad, måste man köra Dijkstra en gång till, från nod 2. Detta ger vägen 2-5-7, med kostnad 11. (Noderna 1 och 3 kan ej nås från nod 2.) Vi får nodpriserna $y_2 = 0$, $y_4 = 4$, $y_5 = 4$, $y_6 = 9$, $y_7 = 11$. Denna duallösning är inte lika med den i uppgift a, men vi har ju (godtyckligt) fixerat y_2 till 0. Om vi istället fixerar den till 6, ökas de andra nodpriserna med 6, så vi får samma värden på y_2, y_4, y_5, y_6 och y_7 som i uppgift a.

Uppgift 5

P0: Grafisk lösning ger $x_1 = 3.5$, $x_2 = 0$ och $z = 14$, vilket ger $\bar{z} = 14$.

Förgrena över x_1: P1 = P0 + ($x_1 \leq 3$), P2 = P0 + ($x_1 \geq 4$).
Jag väljer att gå ner i $\leq$-grenen först.
P1: Grafisk lösning: $x_1 = 3$, $x_2 = 0.6667$, $z = 12.6667$, vilket ger $\bar{z} = 12$.

Förgrena över x_2: P3 = P1 + ($x_2 \leq 0$), P4 = P1 + ($x_2 \geq 1$).
P3: Grafisk lösning: $x_1 = 3$, $x_2 = 0$, $z = 12$. Heltalig lösning, spara, kapa och notera $\underline{z} = 12$.

Eftersom P4 (via P1) har $\bar{z} = 12$, kan den grenen kapas.

P2 saknar tillåten lösning. Kapa.

Trädet avsökt. Bästa lösning $x_1 = 3$, $x_2 = 0$, med $z = 12$.
Svar i ord: Köp tre maskiner av sort 1.

Uppgift 6

6a: För att få med nod 3, måste bågarna (2,3) och (3,7) tas med. Med hänsyn till det, ger närmaste-granne lösningen 1-2-3-7-4-6-5-1, med kostnaden 67.

6b: Billigaste 1-träd kostar 64, så vi har en övre gräns på 67 och en undre på 64. Lösningen ligger som mest 3 enheter från optimum.

6c: Noderna 2, 5, 6 och 7 har udda valens, och det billigaste sättet att höja dessa är att dubblera bågarna (2,4), (4,7) och (5,6). Finn sedan en Eulertur, vilken kostar 99+26=125. För att få reda på hur många gånger noderna besöks, räkna ut nya valensen och dela med 2, vilket ger: nod 1: 1, nod 2: 2, nod 3: 1, nod 4: 3, nod 5: 2, nod 6: 2, nod 7: 2.

Uppgift 7

Efter första steget fås $\alpha = (2, 1, 3, 2, 1)$ och $\beta = (0, 1, 1, 2, 2)$. Man kan stryka alla nollor genom att stryka rad 1 och 2 samt kolumn 1, med minsta ostrukna element 2, vilket gör att vi får $\alpha = (2, 1, 4, 3, 2)$ och $\beta = (-1, 1, 1, 2, 2)$. Nu kan man stryka alla nollor genom att stryka rad 1, 2 och 5 samt kolumn 1, med minsta ostrukna element 1, vilket gör att vi får $\alpha = (2, 1, 5, 4, 2)$ och $\beta = (-2, 1, 1, 2, 2)$.

Nu fås lösningen $x_{13} = 1$, $x_{22} = 1$, $x_{13} = 1$, $x_{45} = 1$, $x_{54} = 1$, dvs. plockare 1 tar odling 3, plockare 2 odling 2, plockare 3 odling 1, plockare 4 odling 5 och lpockare 5 odling 4. Total kostnad (tid) blir 18.