Tekniska Högskolan i Linköping
Matematiska Institutionen
Optimeringslära
Kaj Holmberg

Optimering för ingenjörer
Lösning till tentamen
2015-06-02

Lösningar

Uppgift 1

1a:
Inför slackvariabler x_4 och x_5. Starta med slackvariablerna i basen.

Bas	z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	$\hat{b}$
z	1	-4	-3	1	0	0	0
x_4	0	2	1	0	1	0	4
x_5	0	2	2	-2	0	1	5

Först blir x_1 inkommande och x_4 utgående.

Bas	z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	$\hat{b}$
z	1	0	-1	1	2	0	8
x_1	0	1	1/2	0	1/2	0	2
x_5	0	0	1	-2	-1	1	1

Nu blir x_2 inkommande och x_5 utgående.

Bas	z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	$\hat{b}$
z	1	0	0	-1	1	1	9
x_1	0	1	0	1	1	-1/2	3/2
x_2	0	0	1	-2	-1	1	1

Nu blir x_3 inkommande och x_1 utgående.

Bas	z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	$\hat{b}$
z	1	1	0	0	2	1/2	21/2
x_3	0	1	0	1	1	-1/2	3/2
x_2	0	2	1	0	1	0	4

Därefter fås optimum. $x_1 = 0$, $x_2 = 4$, $x_3 = 1.5$, ($x_4 = 0$, $x_5 = 0$) och $z = 10.5$.
Svar: Gör 4 ton av sort 2 och 1.5 ton av sort 3. Vinst 10.5. Båda råvarorna går åt. Eirikr hade fel.

1b: Skuggpriserna från uppgift a är $y_1 = 2$ och $y_2 = 0.5$, så det är bäst att öka högerledet i bivillkor 1, salmiak.

1c: Ny variabel, x_6, får reducerad kostnad $\hat{c}_6 = c_6 - a_6^T y = 3 - y_1 - y_2 = 3 - 2 - 0.5 = 0.5 > 0$. Ja, salta buggar skulle ge en bättre lösning.

1d: Läs av i näst sista simplextablån i uppgift a. $x_1 = 1.5$, $x_2 = 1$, $x_3 = 0$, ($x_4 = 0$, $x_5 = 0$) och $z = 9$. Svar: Gör 1.5 ton av sort 1 och 1 ton av sort 2. Vinst 9, vilket är 1.5 sämre än i uppgift a.

1e: LP-dual:

$$\begin{array}{llrcrcrl}
\min & v = & 4y_1 & + & 5y_2 & & & \\
\text{då} & & 2y_1 & + & 2y_2 & \geq & 4 & (1) \\
& & y_1 & + & 2y_2 & \geq & 3 & (2) \\
& & & - & 2y_2 & \geq & -1 & (3) \\
& & y_1, & & y_2 & \geq & 0 &
\end{array}$$

Optimal duallösning: $y_1 = 2$, $y_2 = 0.5$ och $v = 10.5$ (vilket stämmer med uppgift a).

Uppgift 2

P0: Grafisk lösning (eller uppgift 1d) ger $x_1 = 1.5$, $x_2 = 1$ och $z = 9$, vilket ger $\bar{z} = 9$.
Förgrena över x_1: P1 = P0 + ($x_1 \leq 1$), P2 = P0 + ($x_1 \geq 2$).
P2: Grafisk lösning: $x_1 = 2$, $x_2 = 0$, $z = 8$. Heltalig lösning, spara, kapa och notera $\underline{z} = 8$.
P1: Grafisk lösning: $x_1 = 1$, $x_2 = 1.5$, $z = 8.5$, vilket ger $\bar{z} = 8$. Nu är $\bar{z} = 8 = \underline{z}$, så grenen kapas.
Trädet avsökt. Bästa lösning $x_1 = 2$, $x_2 = 0$, med $z = 8$. Svar i ord: Gör två ton av sort 1. (Nu fick Eirikur rätt, men det kostade 2.5 jämfört med uppgift 1a.)

Uppgift 3

3a: Skriv problemet på standardform. Vi får $\nabla f(x) = \begin{pmatrix} 2x_1 - x_2 - 3 \\ 4x_2 - x_1 + 2 \end{pmatrix}$,
$\nabla g_1(x) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\nabla g_2(x) = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\nabla g_3(x) = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$.
Hörnpunkterna är: A: (0.5, 0), B: (2, 0), C: (0.5, 1.5).
För punkt A: (0.5, 0):
KKT1: Punkten är tillåten.
KKT2: Bivillkor 1 är inte aktivt, så $u_1 = 0$.
KKT3: $\begin{pmatrix} -2 \\ 1.5 \end{pmatrix} + u_2 \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} + u_3 \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. Detta ger $u_2 = -2 < 0$ och $u_3 = 1.5$, så KKT4 är inte uppfyllt.

För punkt B: (2, 0):
KKT1: Punkten är tillåten.
KKT2: Bivillkor 2 är inte aktivt, så $u_2 = 0$.
KKT3: $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + u_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + u_3 \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. Detta ger $u_1 = -1 < 0$ och $u_3 = -1 < 0$, så KKT4 är inte uppfyllt.

För punkt C: (0.5, 1.5):
KKT1: Punkten är tillåten.
KKT2: Bivillkor 3 är inte aktivt, så $u_3 = 0$.
KKT3: $\begin{pmatrix} -3.5 \\ 7.5 \end{pmatrix} + u_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + u_2 \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. Detta ger $u_1 = -7.5 < 0$ och $u_2 = -11 < 0$, så KKT4 är inte uppfyllt.

Ingen av hörnpunkterna är optimal.

3b: För varje hörn: Rita målfunktionsgradienten, rita en linje som är ortogonal mot den, markera halvrummet bort från gradienten, markera de riktningar i halvrummet som uppfyller bivillkoren. Konen av tillåtna förbättringsriktningar blir inte tom i något hörn (vilket bekräftar resultatet i uppgift a).

3c: I startpunkten är bivillkor 2 och 3 aktiva. Första LP-problemet blir

min $z = -2d_1 + 1.5d_2$ då $d_1 \geq 0$, $d_2 \geq 0$, samt $-1 \leq d \leq 1$,

vilket har optimallösning $d = (1, 0)$ med $z = -2$. Sätt $x^{(2)} = (0.5 + t, 0)$. Maximal steglängd blir 1.5 pga. bivillkor 1. Linjesökning ger $t = 1$, så vi får $x^{(2)} = (1.5, 0)$.

Nu är bara bivillkor 3 aktivt. LP-problemet blir

min $z = 0.5d_2$ då $d_2 \geq 0$, samt $-1 \leq d \leq 1$,

vilket har optimallösning $z = 0$ för t.ex. $d = (0, 0)$ (eller någon annan lösning med $d_2 = 0$). Alltså är $x = (1.5, 0)$ optimal. Nej, de salta buggarna kommer inte att innehålla något salt, så namnet är inte så bra.

Uppgift 4

4a: Handelsresandeproblemet. Kör t.ex. närmaste-granne, vilket t.ex. ger turen 1-3-4-6-5-7-2-1, med kostnaden 28. Billigaste 1-träd kostar 28, så vi har en övre gräns på 28 och en undre på 28. Lösningen är alltså optimal.

4b: Noderna 1 och 7 har udda valens, och det billigaste sättet att höja dessa valenser är att dubblera bågarna (1,3) och (3,7). Finn sedan en Eulertur, vilken kostar 580+70=650, om även andra passeringen av en stig tar $10c_{ij}$, eller 580+7=587, om andra passeringen av en stig tar c_{ij}. (Båda godkänns, och ger samma optimallösning.) För att få reda på hur många gånger noderna besöks, räkna ut nya valensen och dela med 2, vilket ger: nod 1: 2, nod 2: 2, nod 3: 3, nod 4: 2, nod 5: 2, nod 6: 1, nod 7: 2. Han går två gånger i bågarna (1,3 och (3,7).

Uppgift 5

5a: Den givna startlösningen är tillåten och ger basbågarna (2,1), (1,5), (2,3), (3,7), (5,6), (4,7) och (6,8). Detta ger nodpriserna $y_1 = 0$, $y_2 = -5$, $y_3 = 1$, $y_4 = 4$, $y_5 = 6$, $y_6 = 12$, $y_7 = 11$, $y_8 = 18$, och följande reducerade kostnader: $\hat{c}_{24} = -3 < 0$ (optimalt), $\hat{c}_{34} = 3 > 0$ (optimalt), $\hat{c}_{45} = 6 > 0$ (optimalt), $\hat{c}_{46} = -2 < 0$ (optimalt). Lösningen är alltså optimal.

5b: Vi får nu reducerade kostnad $\hat{c}_{45} = -2 < 0$ (ej optimalt, öka), vilket ger x_{45} som inkommande variabel (att öka). Cykeln blir 4-5-1-2-3-7-4, ändringen blir en enhet, och utgående variabel blir x_{21}.

Nu fås nodpriserna $y_1 = 0$, $y_2 = -3$, $y_3 = 3$, $y_4 = 6$, $y_5 = 6$, $y_6 = 12$, $y_7 = 13$, $y_8 = 18$, och följande reducerade kostnader: $\hat{c}_{21} = 2 > 0$ (optimalt), $\hat{c}_{24} = -3 < 0$ (optimalt), $\hat{c}_{34} = 3 > 0$ (optimalt), $\hat{c}_{46} = 0$ (optimalt). Lösningen är alltså nu optimal.

Svar: Ja, flödet ändras, men nej, flödet i båge (4,6) ändras inte. (Eftersom $\hat{c}_{46} = 0$, skulle man kunna göra en iteration med x_{46} som inkommande variabel för minskning, utan att förlora på det, men man skulle inte vinna något på det heller.)

5c: Första flödesökande väg (funnen med Dijkstras metod) blir t.ex. 2-1-5-6-8, med kapaciteten 10. Skicka 10 enheter. Andra flödesökande väg (funnen med Dijkstras metod) blir t.ex. 2-3-4-6-8, med kapaciteten 2. Skicka 2 enheter.

Efter detta saknas flödesökande väg, så maxflöde är funnet. Alla noder utom nod 8 blir uppnådda, så minsnitt går mellan nod 8 och resten.

Uppgift 6

6a: Använd Fords metod. Detta ger vägen 1-3-5-7-4-6-8, med kostnad 17.

6b: Nodpriserna i uppgift a är $y_4 = 12$ och $y_5 = 11$, så båge (5,4) ingår inte i billigaste vägen om $c_{54} > y_4 - y_5 = -1$. Båge (5,4) ingår i billigaste vägen om $c_{54} < -1$. (För $c_{54} = -1$ kan båda hända.) Dessutom ingår bågen i cykeln 5-4-6-5, vilken har kostnaden $c_{54} + 4 - 2 = c_{54} + 2$, vilket ger en negativ cykel om $c_{54} + 2 < 0$, dvs. $c_{54} < -20$. I detta fall finns ingen billigaste väg.

Uppgift 7

Efter första steget fås $\alpha = (5, 5, 6, 5)$ och $\beta = (5, 2, 3, 0)$. Man kan stryka alla nollor genom att stryka rad 1 och 3 samt kolumn 4, med minsta ostrukna element 1, vilket gör att vi får $\alpha = (5, 6, 6, 6)$ och $\beta = (5, 2, 3, -1)$. Nu fås lösningen $x_{13} = 1$, $x_{22} = 1$, $x_{13} = 1$, $x_{44} = 1$, dvs. tandläkare 1 tar student 3, tandläkare 2 tar student 2, tandläkare 3 tar student 1 och tandläkare 4 tar student 4. Total kostnad (tid) blir 32.