Tekniska Högskolan i Linköping
Matematiska Institutionen
Optimeringslära
Kaj Holmberg

Optimering för ingenjörer
Lösning till tentamen
2015-08-28

Lösningar

Uppgift 1

1a:
Inför slackvariabler x_4 och x_5. Starta med slackvariablerna i basen.

Bas	z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	$\hat{b}$
z	1	-3	-4	-5	0	0	0
x_4	0	3	2	5	1	0	7
x_5	0	4	4	5	0	1	8

Först blir x_3 inkommande och x_4 utgående.

Bas	z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	$\hat{b}$
z	1	0	-2	0	1	0	7
x_3	0	3/5	2/5	1	1/5	0	7/5
x_5	0	1	2	0	-1	1	1

Nu blir x_2 inkommande och x_5 utgående.

Bas	z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	$\hat{b}$
z	1	1	0	0	0	1	8
x_3	0	2/5	0	1	2/5	-1/5	6/5
x_2	0	1/2	1	0	-1/2	1/2	1/2

Därefter fås optimum. $x_1 = 0$, $x_2 = 0.5$, $x_3 = 1.2$, ($x_4 = 0$, $x_5 = 0$) och $z = 8$.
Svar: Anlita 50% från LiU och 120% (ev. 100% plus 20%) från Chalmers. Nytta 8.

1b: Skuggpriserna från uppgift a är $y_1 = 0$ och $y_2 = 1$, så mer lokaler ger ingen förbättring, men mer lön gör det.

1c: Ny variabel, x_6, får reducerad kostnad $\hat{c}_6 = c_6 - a_6^T y = 2 - 4y_1 - 3y_2 = 2 - 0 - 3 = -1 < 0$. Nej, en från LTU skulle inte öka nyttan.

1d: LP-dual:

$$
\begin{array}{llrcrcll}
\min & v = & 7y_1 & + & 8y_2 & & & \\
\text{då} & & 3y_1 & + & 4y_2 & \geq & 3 & (1) \\
& & 2y_1 & + & 4y_2 & \geq & 4 & (2) \\
& & 5y_1 & + & 5y_2 & \geq & 5 & (3) \\
& & y_1, & & y_2 & \geq & 0 &
\end{array}
$$

Optimal duallösning: $y_1 = 0$, $y_2 = 1$ och $v = 8$ (vilket stämmer med uppgift a).

Uppgift 2

P0: Grafisk lösning (eller uppgift 1a) ger $x_2 = 0.5$, $x_3 = 1.2$ och $z = 8$, vilket ger $\bar{z} = 8$.
Förgrena över x_2: P1 = P0 + ($x_2 \leq 0$), P2 = P0 + ($x_2 \geq 1$).
P2: Grafisk lösning: $x_2 = 1$, $x_3 = 4/5$, $z = 8$, vilket ger $\bar{z} = 8$.
Förgrena över x_3: P3 = P0 + ($x_3 \leq 0$), P4 = P0 + ($x_3 \geq 1$).
P4: Saknar tillåten lösning. Kapa.
P3: Grafisk lösning: $x_2 = 2$, $x_3 = 0$, $z = 8$, vilket ger $\bar{z} = 8$.
Heltalig lösning, spara, kapa och notera $\underline{z} = 8$.
P1: Eftersom P0 har $\bar{z} = 8$, får P1 $\bar{z} \leq 8$, vilket ger $\bar{z} \leq \underline{z}$. Vi kan därför kapa P1 direkt.

Trädet avsökt. Bästa lösning $x_1 = 2$, $x_2 = 0$, med $z = 8$. Svar i ord: Anställ två personer från LiU, vilket ger nyttan 8. Nyttan är lika stor som i uppgift 1a, så Helpias hjälp är inte värd något alls.

Uppgift 3

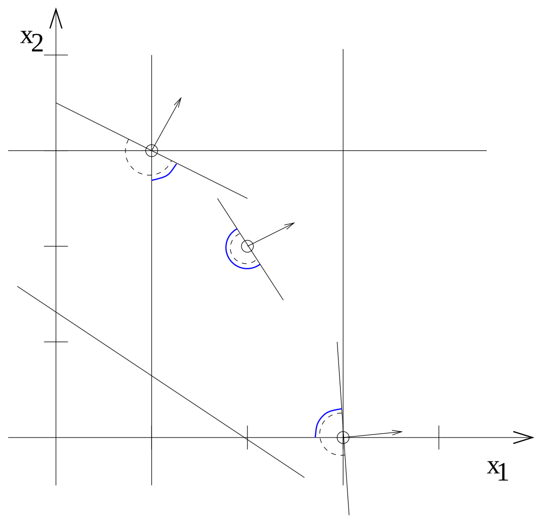
3a: Skriv problemet på standardform. Vi får $g_1(x) = -2x_1 - 3x_2 + 4 \leq 0$, $g_2(x) = -x_1 + 1 \leq 0$, $g_3(x) = x_1 - 3 \leq 0$, $g_4(x) = -x_2 \leq 0$, $g_5(x) = x_2 - 3 \leq 0$, samt $\nabla f(x) = \begin{pmatrix} 6x_1^2 + x_2 \\ 6x_2 + x_1 \end{pmatrix}$, $\nabla g_1(x) = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\nabla g_2(x) = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\nabla g_3(x) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\nabla g_4(x) = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$, $\nabla g_5(x) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.
För punkt A: (1, 3):
KKT1: Punkten är tillåten.
KKT2: Bivillkor 1, 3 och 4 är inte aktiva, så $u_1 = 0$, $u_3 = 0$ och $u_4 = 0$.
KKT3: $\begin{pmatrix} 9 \\ 19 \end{pmatrix} + u_2 \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} + u_5 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. Detta ger $u_2 = 9 > 0$ och $u_3 = -19 < 0$, så KKT4 är inte uppfyllt.

För punkt B: (3, 0):
KKT1: Punkten är tillåten.
KKT2: Bivillkor 1, 2 och 5 är inte aktiva, så $u_1 = 0$, $u_2 = 0$ och $u_5 = 0$.
KKT3: $\begin{pmatrix} 54 \\ 3 \end{pmatrix} + u_3 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + u_4 \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. Detta ger $u_2 = -54 < 0$ och $u_3 = 3 > 0$, så KKT4 är inte uppfyllt.

För punkt C: (2, 2):
KKT1: Punkten är tillåten.
KKT2: Inget bivillkor är aktivt, så $u_1 = 0$, $u_2 = 0$, $u_3 = 0$, $u_4 = 0$ och $u_5 = 0$.
KKT3: $\begin{pmatrix} 26 \\ 14 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. Detta ekvationssystem saknar uppenbarligen lösning, så KKT3 kan inte uppyllas.

Ingen av hörnpunkterna är optimal. (Man kan lätt se att problemet är konvext, eftersom x_1 inte kan vara negativt.)

3b: För varje punkt: Rita målfunktionsgradienten, rita en linje som är ortogonal mot den, markera halvrummet bort från gradienten, markera de riktningar i halvrummet som uppfyller bivillkoren. Se blå markeringar i figuren. Konen av tillåtna förbättringsriktningar blir inte tom i något hörn (vilket bekräftar resultatet i uppgift a).



3c: I startpunkten är inga bivillkor aktiva. Första LP-problemet blir

min $z = 26d_1 + 14d_2$ då $-1 \leq d \leq 1$,

vilket har optimallösning $d = (-1, -1)$ med $z = -40$. Sätt $x^{(2)} = (2-t, 2-t)$. Maximal steglängd blir 1 pga. bivillkor 2. Ledningen ger $t = 1$, så vi får $x^{(2)} = (1, 1)$.

Nu är bara bivillkor 2 aktivt. LP-problemet blir

min $z = 7d_1 + 7d_2$ då $d_1 \geq 0$, samt $-1 \leq d \leq 1$,

vilket har optimallösning $d = (0, -1)$ med $z = -7$. Sätt $x^{(2)} = (1, 1 - t)$. Maximal steglängd blir 1/3 pga. bivillkor 1. Linjesökning ger $t = 7/6$, så vi får $t = 1/3$ och $x^{(3)} = (1, 2/3)$.

Nu är bivillkor 1 och 2 aktiva. LP-problemet blir

min $z = 20/3d_1 + 5d_2$ då $2d_1 + 3d_2 \geq 0$, $d_1 \geq 0$, samt $-1 \leq d \leq 1$,

vilket har optimallösning $z = 0$ för $d = (0, 0)$. Alltså är $x = (1, 2/3)$ optimal.
Svar: Ta med en enhet inositol och 2/3 enheter glukuronolakton.

Uppgift 4

4a: Handelsresandeproblemet. Närmaste-granne ger turen 1-4-5-2-6-3-2-1, med kostnaden 33. (Den turen innehåller ett återbesök, och om man eliminerar det, fås turen 1-4-5-6-3-2-1, med kostnaden 28.)

Billigaste 1-träd kostar 25, så vi har en övre gräns på 33 (eller 28) och en undre på 25. Lösningen är alltså högst 8 (eller 3) från att vara optimal.

4b: Kinesiska brevbärarproblemet. Noderna 1 och 6 har udda valens, och det billigaste sättet att höja dessa valenser är att dubblera bågarna (1,5) och (5,6). Finn sedan en Eulertur, vilken kostar 44+11=55.

4c: Billigaste uppspännandeträdproblemet. Totalkostnad 19.

Uppgift 5

5a: Den givna startlösningen är tillåten och ger basbågarna (1,2), (1,4), (1,5), (2,3), (2,6). Detta ger nodpriserna $y_1 = 0$, $y_2 = 6$, $y_3 = 12$, $y_4 = 5$, $y_5 = 5$, $y_6 = 12$, och följande reducerade kostnader: $\hat{c}_{25} = 2 > 0$ (optimalt), $\hat{c}_{36} = 4 > 0$ (optimalt), $\hat{c}_{45} = 1 > 0$ (optimalt), $\hat{c}_{56} = -2 < 0$ (optimalt, ty maxflöde). Lösningen är alltså optimal.

5b: Vi får nu reducerade kostnad $\hat{c}_{45} = -1 < 0$ (ej optimalt, öka), vilket ger x_{45} som inkommande variabel (att öka). Cykeln blir 4-5-1-4, ändringen blir 4 enheter, och utgående variabel blir x_{14}.

Nu fås nodpriserna $y_1 = 0$, $y_2 = 6$, $y_3 = 12$, $y_4 = 6$, $y_5 = 7$, $y_6 = 12$, och följande reducerade kostnader: $\hat{c}_{14} = -1 < 0$ (optimalt, ty maxflöde), $\hat{c}_{25} = 2 > 0$ (optimalt), $\hat{c}_{36} = 4 > 0$ (optimalt), $\hat{c}_{56} = -2 < 0$ (optimalt, ty maxflöde). Lösningen är alltså nu optimal.

5c: $\hat{c}_{36} = 4$, så det skulle kosta 4.

Uppgift 6

6a: Använd Dijkstras metod. Detta ger vägen 1-5-6, med kostnad 11.

6b: Använd Fords metod. Detta ger vägen 1-4-5-6, med kostnad 0.

6c: Då bildas negativa cykler, t.ex. 5-6-2-5, så då kör han runt i evighet.

Uppgift 7

7a: Efter första steget fås $\alpha = (4, 5, 3, 4)$ och $\beta = (1, 3, 0, 0)$. Man kan stryka alla nollor genom att stryka rad 2 och 4 samt kolumn 3, med minsta ostrukna element 1, vilket gör att vi får $\alpha = (5, 5, 4, 4)$ och $\beta = (1, 3, -1, 0)$. Nu fås lösningen $x_{14} = 1$, $x_{22} = 1$, $x_{33} = 1$, $x_{41} = 1$, dvs. student 1 gör uppgift 4, student 2 gör uppgift 2, student 3 gör uppgift 3, student 4 gör uppgift 1. Total tid blir 21.

7b: Man vill maximera istället för att minimera. Enklast är att byta tecken på målfunktionskoefficienterna. Efter första steget fås $\alpha = (-8, -9, -8, -9)$ och $\beta = (1, 0, 0, 2)$. Man kan stryka alla nollor genom att stryka rad 2 och 3 samt kolumn 2, med minsta ostrukna element 1, vilket gör att vi får $\alpha = (-7, -9, -8, -8)$ och $\beta = (1, -1, 0, 2)$. Nu fås lösningen $x_{11} = 1$, $x_{23} = 1$, $x_{34} = 1$, $x_{42} = 1$, dvs. student 1 gör uppgift 1, student 2 gör uppgift 3, student 3 gör uppgift 4, student 4 gör uppgift 2. Total tid blir 30.