Tekniska Högskolan i Linköping
Matematiska Institutionen
Optimeringslära
Kaj Holmberg

Optimering för ingenjörer
Lösning till tentamen
2015-10-30

Lösningar

Uppgift 1

1a:
Ett LP-problem med två bivillkor får två basvariabler, vilket leder till att högst två olika sorter köps in, eftersom alla ickebasvariabler är noll.

1b:
Inför slackvariabler x_5 och x_6. Starta med slackvariablerna i basen.

Bas	z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	$\hat{b}$
z	1	-3	-5	2	-2	0	0	0
x_5	0	1	0	-1	4	1	0	4
x_6	0	2	2	1	0	0	1	6

Först blir x_2 inkommande och x_6 utgående.

Bas	z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	$\hat{b}$
z	1	2	0	9/2	-2	0	5/2	15
x_5	0	1	0	-1	4	1	0	4
x_2	0	1	1	1/2	0	0	1/2	3

Nu blir x_4 inkommande och x_5 utgående.

Bas	z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	$\hat{b}$
z	1	5/2	0	4	0	1/2	5/2	17
x_4	0	1/4	0	-1/4	1	1/4	0	1
x_2	0	1	1	1/2	0	0	1/2	3

Därefter fås optimum. $x_1 = 0$, $x_2 = 3$, $x_3 = 0$, $x_4 = 1$, $(x_5 = 0,\ x_6 = 0)$ och $z = 17$.
Svar: Köp 300 suddgummin av sort 2 och 100 av sort 4, vilket ger vinsten 17. Båda bivillkoren är aktiva.

1c: Skuggpriserna från uppgift b är $y_1 = 0.5$ och $y_2 = 2.5$, vilket ger förbättringen av en enhet mer i kassan i resp. månad.

1d: Nu får x_3 reducerad kostnad $\hat{c}_3 = c_3 - a_3^T y = 2 - y_1 + y_2 = 2 - 0.5 + 2.5 = 4 > 0$. Detta ger x_3 som inkommande variabel, så lösningen förbättras.

1e: LP-dual:

$$\begin{array}{llrcrcrl}
\min & v = & 4y_1 & + & 6y_2 & & & \\
\text{då} & & y_1 & + & 2y_2 & \geq & 3 & (1) \\
 & & & & 2y_2 & \geq & 5 & (2) \\
 & & -y_1 & + & y_2 & \geq & -2 & (3) \\
 & & 4y_1 & & & \geq & 2 & (4) \\
 & & y_1, & & y_2 & \geq & 0 &
\end{array}$$

Optimal duallösning: $y_1 = 1/2$, $y_2 = 5/2$ och $v = 17$ (vilket stämmer med uppgift b). Duala bivillkor 2 och 4 är aktiva, medan 1 och 3 inte är aktiva, vilket passar bra med att $x_1 = 0$ och $x_3 = 0$. Båda dualvariablerna är större än noll, vilket passar bra med att båda primala bivillkoren är aktiva.

Uppgift 2

P0: Grafisk lösning ger $x_1 = 3$, $x_4 = 0.25$ och $z = 9.5$, vilket ger $\bar{z} = 9$.
Förgrena över x_4: P1 = P0 + $(x_4 \leq 0)$, P2 = P0 + $(x_4 \geq 1)$.
P2: Grafisk lösning: $x_1 = 0$, $x_4 = 1$, $z = 2$. Heltalig lösning, spara, kapa, sätt $\underline{z} = 2$.
P1: Grafisk lösning: $x_1 = 3$, $x_4 = 0$, $z = 9$. Heltalig lösning, spara, kapa, sätt $\underline{z} = 9$.
Trädet avsökt.

(Tar man P1 först, ska man kapa P2 direkt, eftersom P0 har $\bar{z} = 9$.)

Bästa lösning $x_1 = 3$, $x_2 = 0$, med $z = 9$. Svar i ord: Köp 300 suddgummin av sort 1, vilket ger vinst 9.

Uppgift 3

3a: Skriv problemet på standardform. $g_1(x) = x_1 + 2x_2 - 6 \leq 0$, $g_2(x) = x_1 - 1 \leq 0$, $g_3(x) = -x_1 \leq 0$, $g_4(x) = x_2 - 4 \leq 0$, $g_5(x) = -x_2 \leq 0$, $\nabla f(x) = \begin{pmatrix} 6x_1 - 3 - 3x_2 \\ 2x_2 - 2 - 3x_1 \end{pmatrix}$, $\nabla g_1(x) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\nabla g_2(x) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\nabla g_3(x) = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\nabla g_4(x) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\nabla g_5(x) = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$.
För punkt A: (1, 1):
KKT1: Punkten är tillåten.
KKT2: Endast bivillkor 2 är aktivt, så $u_1 = 0$, $u_3 = 0$, $u_4 = 0$ och $u_5 = 0$.
KKT3: $\begin{pmatrix} 0 \\ -3 \end{pmatrix} + u_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. Detta ekvationssystem saknar lösning $(0 \neq 3)$, så KKT3 är inte uppfyllt.

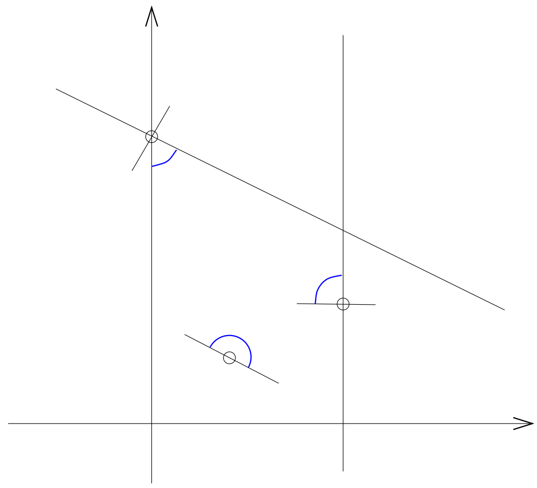
För punkt B: (2, 2):
KKT1: Punkten är inte tillåten, så KKT1 är inte uppfyllt.

För punkt C: (0, 3):
KKT1: Punkten är tillåten.
KKT2: Bivillkor 2, 4 och 5 är inte aktiva, så $u_2 = 0$, $u_4 = 0$ och $u_5 = 0$.
KKT3: $\begin{pmatrix} -12 \\ 4 \end{pmatrix} + u_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + u_3 \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. Detta ger $u_1 = -2 < 0$ och $u_3 = -14 < 0$, så KKT4 är inte uppfyllt.

För punkt D: (0.5, 0.5):
KKT1: Punkten är tillåten.
KKT2: Inget bivillkor är aktivt, så $u_1 = 0$, $u_2 = 0$, $u_3 = 0$, $u_4 = 0$ och $u_5 = 0$.
KKT3: $\begin{pmatrix} -1.5 \\ -2.5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. Detta ekvationssystem saknar uppenbarligen lösning, så KKT3 kan inte uppyllas.

Ingen av hörnpunkterna är optimal. (Problemet är konvext.)

3b: För varje punkt: Rita målfunktionsgradienten, rita en linje som är ortogonal mot den, markera halvrummet bort från gradienten, markera de riktningar i halvrummet som uppfyller bivillkoren.



De tillåtna förbättringsriktningarna är alla riktningar d som uppfyller följande krav:
I punkt A: $d_1 \geq 0$ och $d_2 \leq 0$.
I punkt B: Inga. (Alla riktningar är otillåtna.)
I punkt C: $d_1 \geq 0$ och $d_1 + 2d_2 \leq 0$. (Alla tillåtna riktningar ger förbättring.)
I punkt D: $1.5d_1 + 2d_2 \geq 0$. (Alla riktningar är tillåtna.)

3c: I startpunkten är bara bivillkor 2 aktivt. Första LP-problemet blir

min $z = -3d_2$ då $d_1 \leq 0$, $-1 \leq d \leq 1$,

vilket har optimallösning $d = (0, 1)$ med $z = -3$. Sätt $x^{(2)} = (1, 1 + t)$. Maximal steglängd blir 3/2 pga. bivillkor 1. Linjesökning ger också $t = 3/2$, så vi får $x^{(2)} = (1, 5/2)$.

Nu är bivillkor 1 och 2 aktiva. LP-problemet blir

min $z = -4.5d_1$ då $d_1 + 2d_2 \leq 0$, $d_1 \leq 0$, samt $-1 \leq d \leq 1$,

vilket har optimallösning $d = (0, 0)$ med $z = 0$. Alltså är $x = (1, 5/2)$ optimal.
Svar: Ta en enhet butylgummi och 2.5 enheter neoprengummi.

Uppgift 4

4a: Handelsresandeproblemet. Närmaste-granne ger turen 1-2-5-7-4-3-6-1, med kostnaden 56.

Billigaste 1-träd kostar 50, så vi har en övre gräns på 56 och en undre på 50. Lösningen är alltså högst 6 från att vara optimal.

4b: Kinesiska brevbärarproblemet. Noderna 5 och 7 har udda valens, och det billigaste sättet att höja dessa valenser är att dubblera bågen (5,7). Finn sedan en Eulertur, vilken kostar 128+5=133.

Uppgift 5

5a: Den givna startlösningen är tillåten och ger basbågarna (1,2), (1,4), (3,4) och (2,5). Detta ger nodpriserna $y_1 = 0$, $y_2 = 6$, $y_3 = 2$, $y_4 = 7$, $y_5 = 12$, och följande reducerade kostnader: $\hat{c}_{13} = 0$ (optimalt), $\hat{c}_{32} = 2 > 0$ (optimalt), $\hat{c}_{45} = 1 > 0$ (inte optimalt, minska).

Detta ger x_{45} som inkommande variabel (att minska). Cykeln blir 5-4-1-2-5, ändringen blir 2 enheter, och utgående variabel blir x_{12}.

Nu fås nodpriserna $y_1 = 0$, $y_2 = 7$, $y_3 = 2$, $y_4 = 7$, $y_5 = 13$, och följande reducerade kostnader: $\hat{c}_{12} = -1 < 0$ (optimalt, ty maxflöde), $\hat{c}_{13} = 0$ (optimalt), $\hat{c}_{32} = 1 > 0$ (optimalt). Lösningen är alltså nu optimal.

5b: Utgå från lösningen ovan. $y_3 = 2$ och $y_5 = 13$, så $\hat{c}_{35} = 9 + 2 - 13 = -2 < 0$. Ja, den vägen skulle sänka totalkostnaden.

Uppgift 6

6a: Använd Fords metod. Detta ger vägen 1-6-3-2-7-4-5, med kostnad 9. Ja, han snöröjer på två sträckor.

6b: $y_4 = 4$ och $y_6 = -3$, så om vägen kostar mindre än $y_4 - y_6 = 7$ blir det bättre att använda den.

Uppgift 7

Första flödesökande väg (funnen med Dijkstras metod) blir 1-4-7, med kapaciteten 7. Skicka 7 enheter. Andra flödesökande väg (funnen med Dijkstras metod) blir 1-3-2-5, med kapaciteten 5. Skicka 5 enheter. Tredje flödesökande väg (funnen med Dijkstras metod) blir 1-2-5, med kapaciteten 2. Skicka 2 enheter.

Efter detta saknas flödesökande väg, så maxflöde är funnet. Alla noder utom nod 5 blir uppnådda, så minsnitt går mellan nod 5 och resten.

Uppgift 8

8a: Efter första steget fås $\alpha = (3, 3, 2, 2)$ och $\beta = (0, 1, 0, 1)$. Man kan stryka alla nollor genom att stryka rad 1 och 4 samt kolumn 1, med minsta ostrukna element 1, vilket gör att vi får $\alpha = (3, 4, 3, 2)$ och $\beta = (-1, 1, 0, 1)$. Nu fås lösningen $x_{12} = 1$, $x_{24} = 1$, $x_{31} = 1$, $x_{43} = 1$, dvs. student 1 gör motiv 2, student 2 gör motiv 4, student 3 gör motiv 1, student 4 gör motiv 3. Total tid blir 13.

Summering av duallösningen ger 13, så starka dualsatsen är uppfylld.

8b: α_2 ökas med 10 enheter, resten blir helt oförändrat. Den primala optimallösningen blir oförändrad. (Alla tillåtna lösningar blir 10 dyrare.)