Tekniska Högskolan i Linköping
Matematiska Institutionen
Optimeringslära
Kaj Holmberg

Optimering för ingenjörer
Lösning till tentamen
2016-01-08

Lösningar

Uppgift 1

1a: Handelsresandeproblemet. Närmaste-granne ger t.ex. turen 1-2-4-5-6-7-3-1, med kostnaden $8 + \sqrt{2} + \sqrt{10} \approx 12.6$. Billigaste 1-träd kostar $6 + 2\sqrt{2} + \sqrt{5} \approx 11$. Vi har alltså en övre gräns på $8 + \sqrt{2} + \sqrt{10} \approx 12.6$ och en undre på $6 + 2\sqrt{2} + \sqrt{5} \approx 11$. Lösningen är alltså högst $2 + \sqrt{10} - \sqrt{2} - \sqrt{5} \approx 1.6$ från att vara optimal.

1b: Kinesiska brevbärarproblemet. Noderna 2 och 3 har udda valens, och det billigaste sättet att höja dessa valenser är att dubblera bågen (2,3). En Eulertur till detta blir t.ex. 1-2-3-7-6-3-2-4-6-5-4-1, vilken kostar $57 + 8 = 65$.

Uppgift 2

2a:
Inför slackvariabler x_4 och x_5. Starta med slackvariablerna i basen.

Bas	z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	$\hat{b}$
z	1	-8	-6	-3	-0	0	0
x_4	0	6	5	2	1	0	120
x_5	0	10	5	4	0	1	100

Först blir x_1 inkommande och x_5 utgående.

Bas	z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	$\hat{b}$
z	1	0	-2	1/5	0	4/5	80
x_4	0	0	2	-2/5	1	-3/5	60
x_1	0	1	1/2	2/5	0	1/10	10

Nu blir x_2 inkommande och x_1 utgående.

Bas	z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	$\hat{b}$
z	1	4	0	9/5	0	6/5	120
x_4	0	-4	0	-2	1	-1	20
x_2	0	2	1	4/5	0	1/5	20

Därefter fås optimum. $x_1 = 0$, $x_2 = 20$, $x_3 = 0$, $(x_4 = 20,\ x_5 = 0)$ och $z = 120$.
Svar: Köp 20 diskmaskiner, vilket ger vinsten 120. Kapitalbivillkoret är aktivt, men utrymmesbivillkoret är inte det.

2b: Skuggpriserna från uppgift a är $y_1 = 0$ och $y_2 = 1.2$, vilket ger förbättringen 1.2 för en enhet mer i kapital, men ingen förbättring för mer utrymme.

2c: Ny variabel x_6: reducerad kostnad $\hat{c}_6 = c_6 - a_6^T y = 4 - 0 - 3y_2 = 4 - 3.6 = 0.4 > 0$. Lösningen förbättras alltså genom att köpa kaffeautomater.

2d: LP-dual:

$$
\begin{array}{llrcrcll}
\min & v = & 120y_1 & + & 100y_2 & & & \\
\text{då} & & 6y_1 & + & 10y_2 & \geq & 8 & (1) \\
& & 5y_1 & + & 5y_2 & \geq & 6 & (2) \\
& & 2y_1 & + & 4y_2 & \geq & 3 & (3) \\
& & y_1, & & y_2 & \geq & 0 &
\end{array}
$$

Grafisk lösning: Optimal duallösning: $y_1 = 0$, $y_2 = 6/5$ och $v = 120$ (vilket stämmer med uppgift a).

Komplementaritet:
Primala bivillkor 1 är inte aktivt och $y_1 = 0$.
Primala bivillkor 2 är aktivt och $y_2 > 0$.
Duala bivillkor 1 är inte aktivt och $x_1 = 0$.
Duala bivillkor 2 är aktivt och $y_2 > 0$.
Duala bivillkor 3 är inte aktivt och $y_2 = 0$.

Uppgift 3

3a: Skriv problemet på standardform. $g_1(x) = x_1 + x_2 - 2 \leq 0$, $g_2(x) = x_1 - 1 \leq 0$, $g_3(x) = -x_1 \leq 0$, $g_4(x) = -x_2 \leq 0$, $\nabla f(x) = \begin{pmatrix} 2x_1 - 3 - x_2 \\ 4x_2 - 2 - x_1 \end{pmatrix}$, $\nabla g_1(x) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\nabla g_2(x) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\nabla g_3(x) = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\nabla g_4(x) = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$.
För punkt A: (1, 1):
KKT1: Punkten är tillåten.
KKT2: Bivillkor 3 och 4 är inte aktiva, så $u_3 = 0$ och $u_4 = 0$.
KKT3: $\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} + u_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + u_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. Detta ger $u_1 = -1 < 0$ och $u_2 = 3$, så KKT4 är inte uppfyllt.

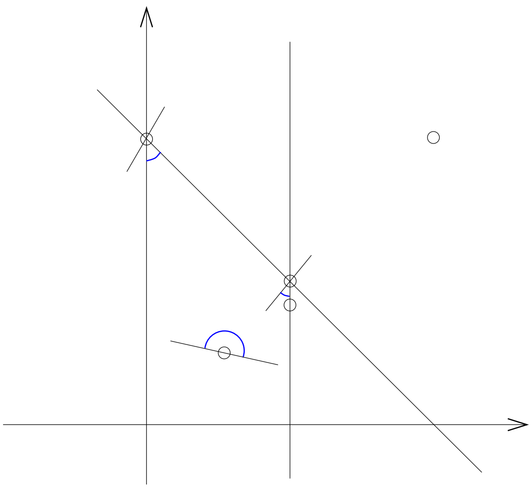
För punkt B: (2, 2):
KKT1: Punkten är inte tillåten, så KKT1 är inte uppfyllt.

För punkt C: (0, 2):
KKT1: Punkten är tillåten.
KKT2: Bivillkor 2 och 4 är inte aktiva, så $u_2 = 0$ och $u_4 = 0$.
KKT3: $\begin{pmatrix} -5 \\ 6 \end{pmatrix} + u_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + u_3 \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. Detta ger $u_1 = -6 < 0$ och $u_3 = -11 < 0$, så KKT4 är inte uppfyllt.

För punkt D: (0.5, 0.5):
KKT1: Punkten är tillåten.
KKT2: Inget bivillkor är aktivt, så $u_1 = 0$, $u_2 = 0$, $u_3 = 0$ och $u_4 = 0$.
KKT3: $\begin{pmatrix} -5/2 \\ -1/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. Detta ekvationssystem saknar lösning, så KKT3 kan inte uppfyllas.

Ingen av hörnpunkterna är optimal. (Problemet är konvext.)

3b: För varje punkt: Rita målfunktionsgradienten, rita en linje som är ortogonal mot den, markera halvrummet bort från gradienten, markera de riktningar i halvrummet som uppfyller bivillkoren.



De tillåtna förbättringsriktningarna är alla riktningar d som uppfyller följande krav:
I punkt A: $d_1 \leq 0$ och $d_2 \leq 2d_1$.
I punkt B: Inga. (Alla riktningar är otillåtna.)
I punkt C: $d_1 \geq 0$ och $d_1 + d_2 \leq 0$. (Alla tillåtna riktningar ger förbättring.)
I punkt D: $2.5d_1 + 0.5d_2 \geq 0$. (Alla riktningar är tillåtna.)
I punkt E: Inga. (Optimum.)

3c: I startpunkten är bara bivillkor 3 och 4 aktiva. Första LP-problemet blir

min $z = -3d_1 - 2d_2$ då $d_1 \leq 0$, $d_2 \geq 0$, $-1 \leq d \leq 1$,

vilket har optimallösning $d = (1, 1)$ med $z = -5$. Sätt $x^{(2)} = (t, t)$. Maximal steglängd blir 1 pga. bivillkor 1 (och 2). Linjesökning ger $t = 5/4$, så vi får $x^{(2)} = (1, 1)$.

Nu är bivillkor 1 och 2 aktiva. LP-problemet blir

min $z = -2d_1 + d_2$ då $d_1 + d_2 \leq 0$, $d_1 \leq 0$, samt $-1 \leq d \leq 1$,

vilket har optimallösning $d = (0, -1)$ med $z = -1$. Sätt $x^{(3)} = (1, 1 - t)$. Maximal steglängd blir 1 pga. bivillkor 3. Linjesökning ger $t = 1/4$, så vi får $x^{(3)} = (1, 3/4)$.

Nu är bivillkor 2 aktivt. LP-problemet blir

min $z = -7/4d_1$ då $d_1 \leq 0$, samt $-1 \leq d \leq 1$,

vilket har optimallösning $d = (0, 0)$ med $z = 0$. Alltså är $x = (1, 3/4)$ optimal.
Svar: Använd en ytenhet till TV-apparater och 0.75 till datorer.

Uppgift 4

P0: Grafisk lösning av LP-relaxationen ger $x_1 = 5$, $x_2 = 5/3$ och $z = 38.333$, vilket ger $\bar{z} = 38$.
Förgrena över x_2: P1 = P0 + ($x_2 \leq 1$), P2 = P0 + ($x_2 \geq 2$).
P2: Grafisk lösning: $x_1 = 14/3$, $x_2 = 2$, $z = 38$, vilket ger $\bar{z} = 38$.
Förgrena över x_1: P3 = P2 + ($x_1 \leq 4$), P4 = P2 + ($x_1 \geq 5$).
P4: Saknar tillåten lösning. Kapa.

P3: Grafisk lösning: $x_1 = 4$, $x_2 = 2$, $z = 34$. Heltalig lösning, spara, kapa, sätt $\underline{z} = 34$.
P1: Grafisk lösning: $x_1 = 5$, $x_2 = 1$, $z = 35$. Bättre heltalig lösning, spara, kapa, sätt $\underline{z} = 35$.
Trädet avsökt.

Bästa lösning $x_1 = 5$, $x_2 = 1$, med $z = 35$. Svar i ord: Köp 5 hyllor av sort 1 och en hylla av sort 2, vilket ger plats för 35 produkter.

Uppgift 5

5a: Den givna startlösningen är tillåten och ger basbågarna (1,2), (2,4), (3,6), (3,7), (5,5) och (7,1). Detta ger nodpriserna $y_1 = 0$, $y_2 = 3$, $y_3 = -22$, $y_4 = 9$, $y_5 = 14$, $y_6 = -14$, $y_7 = -15$, och följande reducerade kostnader: $\hat{c}_{14} = -2$ (optimalt ty $x = u$), $\hat{c}_{23} = 33 > 0$ (optimalt ty $x = 0$), $\hat{c}_{46} = 27 > 0$ (optimalt ty $x = 0$), $\hat{c}_{51} = 23 > 0$ (optimalt ty $x = 0$), $\hat{c}_{56} = 35 > 0$ (optimalt ty $x = 0$), $\hat{c}_{67} = 3 > 0$ (optimalt ty $x = 0$). Alla bågar uppfyller optimalitetskriterierna, så lösningen är optimal.

5b: Nu ändras bara $\hat{c}_{64} = -19 < 0$ (inte optimalt, öka). Detta ger x_{64} som inkommande variabel (att öka). Cykeln blir 6-4-2-1-7-3-6, ändringen blir en enhet, och utgående variabel blir x_{46}.

Nu får vi samma basträd, samma nodpriser och samma reducerade kostnader. Dock är $\hat{c}_{64} = -19 < 0$ optimalt, ty $x = u$. Lösningen är alltså nu optimal.

5c: Utgå från lösningen ovan. $y_6 = -14$ och $y_5 = -15$, så $\hat{c}_{67} = 0 - 14 + 15 = 1 > 0$. Nej, det skulle inte sänka totalkostnaden.

Uppgift 6

En vägsökning med Dijkstras metod ger bästa flödesökande väg 1-2-3-6-7, med kapacitet 3, skicka 3. Ändra tillåtna riktningar. Nästa vägsökning med Dijkstras metod ger bästa flödesökande väg 1-4-5-6-3-7, med kapacitet 2, skicka 2. Ändra tillåtna riktningar. Därefter fås minsnitt kring nod 7. Maxflöde: 5.

Uppgift 7

7a: Använd Dijkstras metod. Detta ger vägen 1-4-6-7, med kostnad 13.

7b: $y_4 = 7$ och $y_3 = 11$, så om vägen kostar mindre än $y_3 - y_4 = 4$ blir det bättre att använda den.

Uppgift 8

8a: Efter första steget fås $\alpha = (7, 6, 6, 8)$ och $\beta = (1, 5, 0, 8)$. Man kan stryka alla nollor genom att stryka rad 1 samt kolumn 1 och 3, med minsta ostrukna element 1, vilket gör att vi får $\alpha = (7, 7, 7, 9)$ och $\beta = (0, 5, -1, 8)$. Nu fås t.ex. lösningen $x_{12} = 1$, $x_{24} = 1$, $x_{31} = 1$, $x_{43} = 1$, dvs. nisse 1 gör uppgift 2, nisse 2 gör uppgift 4, nisse 3 gör uppgift 1, nisse 4 gör uppgift 3. Total tid blir 42.

Summering av duallösningen ger 42, så starka dualsatsen är uppfylld.

8b: β_3 ökas med 20 enheter, resten blir helt oförändrat. Den primala optimallösningen blir oförändrad. (Alla tillåtna lösningar blir 20 dyrare.)