Tekniska Högskolan i Linköping
Matematiska Institutionen
Optimeringslära
Kaj Holmberg

Optimering för ingenjörer
Lösning till tentamen
2014-01-08

Lösningar

Uppgift 1

1a:
Inför slackvariabler x_4 och x_5. Starta med slackvariablerna i basen.

Bas	z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	$\hat{b}$
z	1	-6	-5	-5	0	0	0
x_4	0	1	1	2	1	0	6
x_5	0	2	0	1	1	1	8

Först blir x_1 inkommande och x_5 utgående.

Bas	z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	$\hat{b}$
z	1	0	-5	-2	0	3	24
x_4	0	0	1	3/2	1	-1/2	2
x_1	0	1	0	1/2	0	1/2	4

Sedan blir x_2 inkommande och x_4 utgående.

Bas	z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	$\hat{b}$
z	1	0	0	11/2	5	1/2	34
x_2	0	0	1	3/2	1	-1/2	2
x_1	0	1	0	1/2	0	1/2	4

Därefter fås optimum. $x_1 = 4$, $x_2 = 2$, $x_3 = 0$, ($x_4 = 0$, $x_5 = 0$,) och $z = 34$. Svar: Gör 4000 skruvar och 2000 spikar (och inga bultar), vilket ger vinsten 3400 kr. Båda bivillkoren är aktiva, dvs. båda råvarorna går åt.

1b: Skuggpriserna är $y_1 = 5$ och $y_2 = 0.5$. 1 kg ökning ger en ökning av 0.01 av b_1 resp en ökning av 0.1 av b_2 p.g.a. sorterna (100 kg resp 10 kg). Det betyder att ökningen av målfunktionsvärdet blir 0.05, dvs. 5 kr, oavsett vilken man väljer. Så järn och zink är lika bra.

1c: Reducerad kostnad för den nya variabeln, x_6, blir $\hat{c}_6 = c_6 - a_6^T y$, där $a_6 = \begin{pmatrix} d \\ d \end{pmatrix}$, $c_6 = 5.5$ och y är den optimala duallösningen, som läses ut ur optimaltablån: $y_1 = 5$ och $y_2 = 0.5$. Vi får $\hat{c}_6 = 5.5 - 5d - 0.5d = 5.5 - 5.5d$, så x_6 blir inkommande om $5.5 - 5.5d > 0$, dvs. $d < 1$. Svar: Mindre än 0.1 kg järn. (Dvs. mindre än 100 kg per 1000 st.)

1d: (Standard.) Nya primala variabeln blir ett nytt dualt bivillkor.

Uppgift 2

2a: Problemet skrivet i standardform är:

$$
\begin{array}{rl}
\min & f(x) = -6x_1 - 5x_2 - 5x_3 \\
\text{då} & g_1(x) = x_1 + x_2 + 2x_3 - 6 \leq 0 \\
& g_2(x) = 2x_1 + x_3 - 8 \leq 0 \\
& g_3(x) = -x_1 \leq 0 \\
& g_4(x) = -x_2 \leq 0 \\
& g_5(x) = -x_3 \leq 0
\end{array}
$$

Vi har $\nabla f(x) = \begin{pmatrix} -6 \\ -5 \\ -5 \end{pmatrix}$, $\nabla g_1(x) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\nabla g_2(x) = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\nabla g_3(x) = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\nabla g_4(x) = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\nabla g_5(x) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$.

För punkten $x^{(1)}$:
KKT1: Punkten är tillåten.
KKT2: Bivillkor 1 och 2 är inte aktiva, så $u_1 = 0$ och $u_2 = 0$.
KKT3: $\begin{pmatrix} -6 \\ -5 \\ -5 \end{pmatrix} + u_3 \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + u_4 \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + u_5 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. Lösningen är $u_3 = -6$, $u_4 = -5$, $u_5 = -5$, vilket inte uppfyller KKT4, så $x^{(1)}$ är inte en KKT-punkt.

För punkten $x^{(2)}$:
KKT1: Punkten är inte tillåten.
$x^{(2)}$ är inte en KKT-punkt.

För punkten $x^{(3)}$:
KKT1: Punkten är tillåten.
KKT2: Inget av bivillkoren är aktivt, så $u_1 = 0$, $u_2 = 0$, $u_3 = 0$, $u_4 = 0$ och $u_5 = 0$.
KKT3: $\begin{pmatrix} -6 \\ -5 \\ -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. Detta har uppenbarligen ingen lösning, så $x^{(3)}$ är inte en KKT-punkt.

För punkten $x^{(4)}$:
KKT1: Punkten är tillåten.
KKT2: Bivillkor 2, 3, 4 och 5 är inte aktiva, så $u_2 = 0$, $u_3 = 0$, $u_4 = 0$ och $u_5 = 0$.
KKT3: $\begin{pmatrix} -6 \\ -5 \\ -5 \end{pmatrix} + u_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. Det finns inget lösning till detta, så $x^{(4)}$ är inte en KKT-punkt.

2b: Första LP-problemet blir

min $z = -6d_1 - 5d_2$ då $d_1 \geq 0$, $d_2 \geq 0$, samt $-1 \leq d \leq 1$,

vilket har optimallösning $d = (1, 1)$ med $z = -11$. Sätt $x^{(2)} = (t, t)$. Maximal steglängd blir 3 pga. första bivillkoret. Eftersom målfunktionen är linjär behöver vi inte göra någon linjesökning, utan vill alltid gå så långt vi får. Vi sätter $t = 3$ och får $x^{(2)} = (3, 3)$.

Aktivt bivillkor är nu 1. LP-problemet blir

min $z = -6d_1 - 5d_2$ då $d_1 + d_2 \leq 0$, $-1 \leq d \leq 1$,

vilket har optimallösning $d = (1, -1)$ med $z = -1$. Sätt $x^{(3)} = (3 + t, 3 - t)$. Maximal steglängd blir 1 pga. andra bivillkoret. Vi sätter $t = 1$ och får $x^{(2)} = (4, 2)$.

Aktiva bivillkor är nu 1 och 2. LP-problemet blir

min $z = -6d_1 - 5d_2$ då $d_1 + d_2 \leq 0$, $2d_1 \leq 0$, $-1 \leq d \leq 1$,

vilket har optimallösning $d = (0, 0)$ med $z = 0$. Alltså är $x^{(2)} = (4, 2)$ optimal.

Uppgift 3

3a: Den givna startlösningen ger följande basbågar: (1,4), (2,5), (3,5), (3,6), (4,6), (5,7) samt (7,8), (7,9) och (7,10). Detta ger nodpriserna $y_1 = 0$, $y_2 = 23$, $y_3 = 22$, $y_4 = 21$, $y_5 = 43$, $y_6 = 41$, $y_7 = 57$, $y_8 = 75$, $y_9 = 70$, $y_{10} = 74$, och följande reducerade kostnader: $\hat{c}_{12} = -4 < 0$ (optimalt), $\hat{c}_{13} = -5 < 0$ (optimalt), $\hat{c}_{26} = 6 > 0$ (optimalt), $\hat{c}_{67} = 1 > 0$ (inte optimalt, minska).

Detta ger x_{67} som inkommande variabel (att minska). Cykeln blir 7-6-3-5-7, ändringen blir 9 enheter, och utgående variabel blir t.ex. x_{36}.

Nu fås nodpriserna $y_1 = 0$, $y_2 = 24$, $y_3 = 23$, $y_4 = 21$, $y_5 = 44$, $y_6 = 41$, $y_7 = 58$, $y_8 = 76$, $y_9 = 71$, $y_{10} = 75$, och följande reducerade kostnader: $\hat{c}_{12} = -5 < 0$ (optimalt), $\hat{c}_{13} = -6 < 0$ (optimalt), $\hat{c}_{26} = 7 > 0$ (optimalt), $\hat{c}_{36} = 1 > 0$ (optimalt). Lösningen är optimal.

3b: Reducerad kostnad: $\hat{c}_{6,10} = 25 + 41 - 75 = -9 < 0$. Ja, kostnaden kommer att minska.

3c: Använd Dijkstras metod. Billigaste väg: 1-3-6-7-9, kostnad: 64.

3d: Maximal flödesökande väg (funnen med Dijkstras metod): 1-4-6-3-5-7, kapacitet: 9. Skicka 9 enheter. Därefter fås minsnitt kring nod 1.

Uppgift 4

Detta är ett hinkpackningsproblem. Bästa plats ger följande lösning:
Bil 1: 10, 8.
Bil 2: 12, 5.
Bil 3: 13, 7.
Bil 4: 6, 13.

Summan av vikterna är 74, så minst $\lceil 74/20 \rceil = 4$ lastbilar krävs. Lösningen använder 4 bilar, så detta är optimalt.

Uppgift 5

5a: Det är ett handelsresandeproblem, som är *NP*-svårt. Det finns flera olika heuristiker man kan använda. Man kan t.ex. få en tur som kostar 151.

5b: En lämplig relaxation är billigaste 1-träd, vilket har kostnad 137. Det optimala målfunktionsvärdet ligger alltså mellan 137 och 151, eller med andra ord, Maltes lösning är högst 14 dyrare än optimum.

5c: Man söker ett billigaste uppspännande träd. Använd Kruskals eller Prims metod. Totalkostnad: 116.

5d: Man söker en Eulertur, men en sådan finns inte, ty alla noder har inte jämn valens.

5e: Det är nu ett kinesiskt brevbärarproblem. Noderna 2, 7, 8 och 9 har udda valens, och det billigaste sättet att öka dessa är att duplicera bågarna (2,8) och (7,9). Det är alltså dessa sträckor som ska köras två gånger. Kostnaden blir 282+23+17=322.

Uppgift 6

P0: Grafisk lösning ger $x_1 = 1$, $x_2 = 1.5$, $z = 350000$, vilket ger $\bar{z} = 350000$.

Förgrena över x_2: P1 = P0 + ($x_2 \leq 1$), P2 = P0 + ($x_2 \geq 2$).

Jag väljer att gå ner i $\leq$-grenen först.

P1: Grafisk lösning ger $x_1 \approx 1.333$, $x_2 = 1$, $z \approx 333333$, vilket ger $\bar{z} = 333333$.

Förgrena över x_1: P3 = P1 + ($x_1 \leq 1$), P4 = P1 + ($x_1 \geq 2$).

P3: Grafisk lösning ger $x_1 = 1$, $x_2 = 1$, $z = 300000$. Tillåten heltalslösning, $\underline{z} = 300000$. Kapa.

P4: Tillåten lösning saknas. Kapa.

P2: Tillåten lösning saknas. Kapa.

Trädet avsökt. Bästa lösning $x_1 = 1$, $x_2 = 1$, med $z = 300000$.
Svar i ord: Gör en skördetröska och en traktor. Detta ger en vinst på 300 000 kr.