Tekniska Högskolan i Linköping
Matematiska Institutionen
Optimeringslära
Kaj Holmberg

Optimering för ingenjörer
Lösning till tentamen
2014-10-31

Lösningar

Uppgift 1

1a:
Inför slackvariabler x_3, x_4 och x_5. Starta med slackvariablerna i basen.

Bas	z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	$\hat{b}$
z	1	-5	-6	0	0	0	0
x_3	0	1	1	1	0	0	2
x_4	0	4	5	0	1	0	9
x_5	0	4	3	0	0	1	10

Först blir x_2 inkommande och x_4 utgående.

Bas	z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	$\hat{b}$
z	1	-1/5	0	0	6/5	0	54/5
x_3	0	1/5	0	1	-1/5	0	1/5
x_2	0	4/5	1	0	1/5	0	9/5
x_5	0	8/5	0	0	-3/5	1	23/5

Nu blir x_1 inkommande och x_3 utgående.

Bas	z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	$\hat{b}$
z	1	0	0	1	1	0	11
x_1	0	1	0	5	-1	0	1
x_2	0	0	1	-4	1	0	1
x_5	0	0	0	-8	1	1	3

Därefter fås optimum. $x_1 = 1$, $x_2 = 1$, ($x_3 = 0$, $x_4 = 0$, $x_5 = 3$) och $z = 11$. Svar: Tryck gamla tentor och kompendier i ett dugn vardera. Det ger vinsten 11000 kr. Det blir häftklamrar över, men pappret går åt.

1b: Skuggpriserna från uppgift a är $y_1 = 1$, $y_2 = 1$ och $y_3 = 0$. En liten ökning av högerledet i bivillkor 2 ger lika stor ökning av optimala målfunktionsvärdet.

1c: (Standard.)

1d: Ny variabel, x_6, får reducerad kostnad $\hat{c}_6 = c_6 - a_6^T y = 6 - y_1 - 4y_2 - 4y_3 = 6 - 1 - 4 = 1 > 0$. (Man måste ha samma sorter som när y beräknades.) Svar ja, det lönar sig att trycka nya tentor.

Uppgift 2

2a: Ja, problemet är konvext. Två kvadrater i målfunktionen, linjära bivillkor.

2b: Problemet skrivet i standardform är:

$$\begin{array}{rl} \min & f(x) = (x_1-3)^2 + 2(x_2-2)^2 \\ \text{då} & g_1(x) = x_1 + x_2 - 3 \le 0 \\ & g_2(x) = x_1 - 3 \le 0 \\ & g_3(x) = x_2 - 3 \le 0 \\ & g_4(x) = -x_1 \le 0 \\ & g_5(x) = -x_2 \le 0 \end{array}$$

Vi har $\nabla f(x) = \begin{pmatrix} 2(x_1-3) \\ 4(x_2-2) \end{pmatrix}$, $\nabla g_1(x) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\nabla g_2(x) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$,
$\nabla g_3(x) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$,
$\nabla g_4(x) = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\nabla g_5(x) = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$.

(Man kan ev. notera att bivillkor 2 och 3 är redundanta, och kan tas bort. Det är detsamma som att fixera $u_2 = 0$ och $u_3 = 0$.)

För mittpunkten ($x_1 = 1.5, x_2 = 1.5$):
KKT1: Punkten är tillåten.
KKT2: Bara bivillkor 1 är aktivt, så $u_2 = 0$, $u_3 = 0$, $u_4 = 0$ och $u_5 = 0$.
KKT3: $\begin{pmatrix} -3 \\ -2 \end{pmatrix} + u_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. Eftersom man inte kan ha både $u_1 = 3$ och $u_1 = 2$, saknar KKT3 tillåten lösning, så detta är inte en KKT-punkt.

För hörn A ($x_1 = 0, x_2 = 3$):
KKT1: Punkten är tillåten.
KKT2: Bivillkor 2 och 5 är inte aktiva, så $u_2 = 0$ och $u_5 = 0$.
KKT3: $\begin{pmatrix} -6 \\ 4 \end{pmatrix} + u_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + u_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + u_4 \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. Detta ger $u_1 - u_4 = 6$ och $u_1 + u_3 = -4$. Det går uppenbarligen inte att få både $u_1 \ge 0$ och $u_3 \ge 0$, så punkten är inte en KKT-punkt. (Om $u_3 = 0$, fås $u_1 = -4 < 0$ och $u_4 = -10 < 0$.)

För hörn B ($x_1 = 3, x_2 = 0$):
KKT1: Punkten är tillåten.
KKT2: Bivillkor 3 och 4 är inte aktiva, så $u_3 = 0$ och $u_4 = 0$.
KKT3: $\begin{pmatrix} 0 \\ -8 \end{pmatrix} + u_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + u_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + u_5 \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. Detta ger $u_1 + u_2 = 0$ och $u_1 - u_5 = 8$. Fär att få både $u_1 \ge 0$ och $u_2 \ge 0$, måste vi sätta $u_1 = 0$ och $u_2 = 0$, men då blir $u_5 < 0$. Denna punkt är inte en KKT-punkt. (Om $u_2 = 0$, fås $u_1 = 0$ och $u_5 = -8 < 0$.)

2c: I startpunkten är bivillkor 4 och 5 aktiva. Första LP-problemet blir

min $z = -6d_1 - 8d_2$ då $d_1 \ge 0$, $d_2 \ge 0$, samt $-1 \le d \le 1$,

vilket har optimallösning $d = (1, 1)$ med $z = -14$. Sätt $x^{(2)} = (t, t)$. Maximal steglängd blir 1.5 pga. bivillkor 1. Linjesökning ger att vi vill sätta $t = 7/3 > 1.5$, så vi får $t = 1.5$ och $x^{(2)} = (1.5, 1.5)$.

Nu är bara bivillkor 1 aktivt. LP-problemet blir

min $z = -3d_1 - 2d_2$ då $d_1 + d_2 \le 0$, samt $-1 \le d \le 1$, vilket har optimallösning $d = (1, -1)$ med $z = -1$. Sätt $x^{(2)} = (1.5+t, 1.5-t)$. Maximal steglängd blir 1.5 pga. bivillkor 2 (och 4). Linjesökning ger att vi sätter $t = 1/6$, så vi får $x^{(2)} = (5/3, 4/3)$.

Nu är bara bivillkor 1 aktivt. LP-problemet blir

min $z = -8/3d_1 - 8/3d_2$ då $d_1 + d_2 \leq 0$, samt $-1 \leq d \leq 1$,

vilket har optimallösning med $z = 0$ (t.ex. $d = (0, 0)$). Alltså är punkten $x^{(2)} = (5/3, 4/3)$ optimal.

2d: $\min f(x) = (x_1 - 3)^2 + 2(x_2 - 2)^2 + \mu_1(\max(0, x_1 + x_2 - 3))^2 + \mu_2(\max(0, x_1 - 3))^2 + \mu_3(\max(0, x_2 - 3))^2 + \mu_4(\max(0, -x_1))^2 + \mu_5(\max(0, -x_2))^2$

Lös med brantaste lutningsmetoden, någon konjugerad gradientmetod eller någon kvasi-Newtonmetod.

Uppgift 3

3a: Den givna startlösningen är tillåten och ger basbågarna (1,2), (2,5), (3,5) och (3,6) samt någon båge som går till nod 4, t.ex. (1,4). Detta ger nodpriserna $y_1 = 0$, $y_2 = 7$, $y_3 = 7$, $y_4 = 7$, $y_5 = 13$, $y_6 = 13$, och följande reducerade kostnader: $\hat{c}_{13} = -2 < 0$ (optimalt), $\hat{c}_{23} = 5 > 0$ (optimalt), $\hat{c}_{43} = 3 > 0$ (optimalt), $\hat{c}_{46} = 1 > 0$ (optimalt), $\hat{c}_{56} = 6 > 0$ (optimalt). Lösningen är optimal.

3b: Nu fås $\hat{c}_{46} = -1 < 0$ (ej optimalt, öka), vilket ger x_{46} som inkommande variabel (att öka). Cykeln blir 4-6-3-5-2-1-4, ändringen blir 2 enheter, och utgående variabel blir x_{12} (eller x_{25}).

Nu fås nodpriserna $y_1 = 0$, $y_2 = 6$, $y_3 = 6$, $y_4 = 7$, $y_5 = 12$, $y_6 = 12$, och följande reducerade kostnader: $\hat{c}_{12} = 1 > 0$ (optimalt), $\hat{c}_{13} = -1 < 0$ (optimalt), $\hat{c}_{23} = 5 > 0$ (optimalt), $\hat{c}_{43} = 4 > 0$ (optimalt), $\hat{c}_{56} = 6 > 0$ (optimalt). Nu är lösningen optimal.

3c: Lösningen till uppgift b gav nodpriser $y_1 = 0$ och $y_3 = 6$, så reducerade kostnad för båge (1,3) blir $\hat{c}_{13} = c_{13} - 6$, vilket blir större än noll om $c_{13} > 6$. Om kostnaden blir högre än 6 kommer Fiffel&Fix att ändra sin transportplan.

Uppgift 4

4a: Kör Fords metod (ty negativa kostnader), vilket ger vägen 1-2-5-6, med kostnad 9.

4b: Nodpriserna är $y_2 = 7$ och$y_3 = 5$, så $\hat{c}_{23} = c_{23} + 7 - 5 = c_{23} + 2 < 0$ om $c_{23} < -2$. Detta innebär att y_3 sänks till $c_{23} + 7$.

Dock ingår inte nod 3 i billigaste vägen om inte $y_3 + 5 \leq 9$, dvs. om inte $y_3 \leq 4$. För det krävs $c_{23} + 7 \leq 4$, dvs. $c_{23} \leq -3$.

Dock ingår inte nod 3 i billigaste vägen om inte y_5 eller y_9 bestäms via nod 3. För y_9 krävs $y_3 + 5 \leq 9$, dvs. $y_3 \leq 4$. För det krävs $c_{23} + 7 \leq 4$, dvs. $c_{23} \leq -3$. För y_5 krävs $y_3 + 8 \leq 12$, dvs. $y_3 \leq 4$. För det krävs $c_{23} + 7 \leq 4$, dvs. $c_{23} \leq -3$. Alltså är $c_{23} \leq -3$ tillräckligt.

Uppgift 5

5a: Sök flödesökande väg. Man når noderna 1, 2, 3, 4 och 5, men inte nod 6, så flödet är maximalt och minsnittet går runt nod 6.

5b: En maximal flödesökande väg (funnen med Dijkstras metod) blir 1-2-3-4-6, med kapaciteten 1. Skicka en enhet, och ändra tillåtna riktningar.

När vi nästa gång söker flödesökande väg, når vi bara nod 1, 2, 3 och 5, så minsnittet går mellan dessa noder och noderna 4 och 6. (Det finns även ett minsnitt runt nod 6.)

Uppgift 6

P0: Grafisk lösning ger $x_1 = 4/3$, $x_2 = 5/6$ och $z = 48.667$, vilket ger $\bar{z} = 48$.

Förgrena över x_2: P1 = P0 + ($x_2 \leq 0$), P2 = P0 + ($x_2 \geq 1$).
Jag väljer att gå ner i $\geq$-grenen först.
P2: Grafisk lösning: $x_1 = 1$, $x_2 = 1$, $z = 44$. Heltalig lösning, spara, kapa och notera $\underline{z} = 44$.

P1: Grafisk lösning ger $x_1 = 2$, $x_2 = 0$, $z = 48$, vilket ger $\bar{z} = 48$. Heltal, och bättre lösning, spara, kapa och notera $\underline{z} = 48$.

Trädet avsökt. Bästa lösning $x_1 = 2$, $x_2 = 0$, med $z = 48$.
Svar i ord: Köp två maskiner av sort 1.

Uppgift 7

7a: Man kan t.ex. få en tillåten lösning med kostnaden 47 genom att starta närmaste granne i nod 2.

7b: Billigaste 1-träd kostar 41, så vi har en övre gräns på 47 och en undre på 41. Lösningen ligger alltså som mest 6 enheter från optimum.

7c: Kruskals eller Prims metod ger ett billigaste uppspänannde träd som kostar 34.

7d: Nej, ty det finns flera noder med udda valens.

Uppgift 8

Efter första steget fås $\alpha = (3, 4, 5, 4, 4)$ och $\beta = (0, 0, 1, 0, 0)$. Man kan stryka alla nollor genom att stryka rad 1, 2 och 3 samt kolumn 1, med minsta ostrukna element 1, vilket gör att vi får $\alpha = (3, 4, 5, 5, 5)$ och $\beta = (-1, 0, 1, 0, 0)$. Nu fås lösningen $x_{13} = 1$, $x_{24} = 1$, $x_{35} = 1$, $x_{41} = 1$, $x_{52} = 1$, dvs. bil 1 åker till plats 3, bil 2 till plats 4, bil 3 till plats 5, bil 4 till plats 1 och bil 5 till plats 2. Total kostnad blir 22.