Tekniska Högskolan i Linköping
Matematiska Institutionen
Optimeringslära
Kaj Holmberg

Optimering för ingenjörer
Lösning till tentamen
2016-06-01

Lösningar

Uppgift 1

Hinkpackning (hink = tur med cykeln). Jag använder första plats-heuristiken:
Ta med sak 1 (4 kg) tur 1, 46 kg kvar i tur 1.
Ta med sak 2 (10 kg) tur 1, 36 kg kvar i tur 1.
Ta med sak 3 (15 kg) tur 1, 21 kg kvar i tur 1.
Ta med sak 4 (5 kg) tur 1, 16 kg kvar i tur 1.
Sak 5 (25 kg) får inte plats tur 1, ta med tur 2, 25 kg kvar i tur 2.
Sak 6 (35 kg) får inte plats tur 1 eller 2, ta med tur 3, 15 kg kvar i tur 3.
Sak 7 (30 kg) får inte plats tur 1, 2 eller 3, ta med tur 4, 20 kg kvar i tur 4.
Sak 8 (17 kg) får inte plats tur 1, ta med tur 2, 8 kg kvar i tur 2.
Ta med sak 9 (15 kg) tur 1, 1 kg kvar i tur 1.
Sak 10 (8 kg) får inte plats tur 1, ta med tur 2, tur 2 helt full.
Sak 11 (8 kg) får inte plats tur 1 eller 2, ta med tur 3, 7 kg kvar i tur 3.

Det räckte alltså med 4 turer. Undre gräns $\lceil 174/50 \rceil = 4$, så lösningen är optimal.

Uppgift 2

Förbearbetning: Dividera målfunktionen med 10 och prisvillkoret med 1000.

Jag går ner i $\leq$-grenen först.
P0: Grafisk lösning av LP-relaxationen ger $x_1 = 5/2 = 2.5$, $x_2 = 3/2 = 1.5$ och $z = 9.5$, vilket ger $\bar{z} = 9$.
Förgrena över x_1: P1 = P0 + ($x_2 \leq 2$), P2 = P0 + ($x_2 \geq 3$).
P1: Grafisk lösning: $x_1 = 2$, $x_2 = 5/3$, $z = 9$, vilket ger $\bar{z} = 9$.
Förgrena över x_2: P3 = P2 + ($x_1 \leq 1$), P4 = P2 + ($x_1 \geq 2$).
P3: Grafisk lösning: $x_1 = 2$, $x_2 = 1$, $z = 7$. Heltalig lösning, spara, kapa, sätt $\underline{z} = 7$.
P4: Grafisk lösning: $x_1 = 1$, $x_2 = 2$, $z = 8$. Bättre heltalig lösning, spara, kapa, sätt $\underline{z} = 8$.
P2: Grafisk lösning: $x_1 = 3$, $x_2 = 1$, $z = 9$. Bättre heltalig lösning, spara, kapa, sätt $\underline{z} = 9$.
Trädet avsökt.

Bästa lösning $x_1 = 3$, $x_2 = 1$, med $z = 9$. Svar i ord: Köp 3 Bully och en Polly, vilket ger plats för 90 böcker.

Uppgift 3

Använd Dijkstras metod. Detta ger vägen 1-7-6-5, med kostnad 13. Nodmärkningar:
1: (0,-), 2: (4,1), 3: (11,2), 4: (5,1), 5: (13,6), 6: (9,7), 7: (3,1).

Uppgift 4

4a: Skriv problemet på standardform. $g_1(x) = x_1 + x_2 - 2 \leq 0$, $g_2(x) = -x_1 \leq 0$, $g_3(x) = -x_2 \leq 0$, $\nabla f(x) = \begin{pmatrix} 4x_1 - 2x_2 - 8 \\ 2x_2 - 2x_1 - 5 \end{pmatrix}$, $\nabla g_1(x) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\nabla g_2(x) = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\nabla g_3(x) = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$.
(Kontroll av Hessianen visar att problemet är konvext.)

För punkt A: (1, 1):
KKT1: Punkten är tillåten.
KKT2: Bivillkor 2 och 3 är inte aktiva, så $u_2 = 0$ och $u_3 = 0$.
KKT3: $\begin{pmatrix} -6 \\ -5 \end{pmatrix} + u_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. Detta ger $u_1 = 6$ och $u_1 = 5$, vilket inte kan hända, så KKT3 saknar lösning.

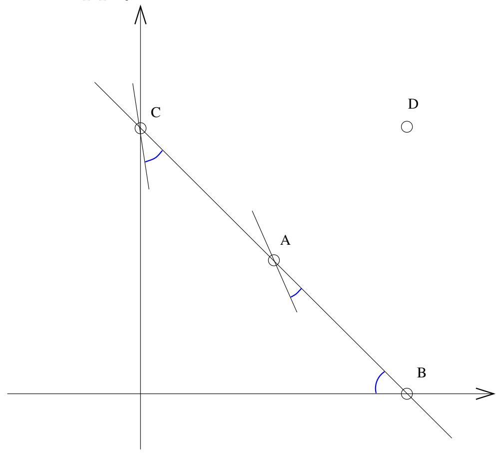
För punkt B: (2, 0):
KKT1: Punkten är tillåten.
KKT2: Bivillkor 2 är inte aktivt, så $u_2 = 0$.
KKT3: $\begin{pmatrix} 0 \\ -9 \end{pmatrix} + u_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + u_3 \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. Detta ger $u_1 = 0$ och $u_3 = -9 < 0$, så KKT4 är inte uppfyllt.

För punkt C: (0, 2):
KKT1: Punkten är tillåten.
KKT2: Bivillkor 3 är inte aktivt, så $u_3 = 0$.
KKT3: $\begin{pmatrix} -12 \\ -1 \end{pmatrix} + u_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + u_2 \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. Detta ger $u_1 = 1$ och $u_3 = -11 < 0$, så KKT4 är inte uppfyllt.

För punkt D: (2, 2):
KKT1: Punkten är inte tillåten, så KKT1 är inte uppfyllt.

Ingen av hörnpunkterna är optimal.

4b: För varje punkt: Rita målfunktionsgradienten, rita en linje som är ortogonal mot den, markera halvrummet bort från gradienten, markera de riktningar i halvrummet som uppfyller bivillkoren. Se blå markeringar i figuren.



4c: I startpunkten är bara bivillkor 2 och 3 aktiva. Första LP-problemet blir

min $z = -8d_1 - 5d_2$ då $d_1 \geq 0$, $d_2 \geq 0$, $-1 \leq d \leq 1$,

vilket har optimallösning $d = (1, 1)$ med $z = -13$. Sätt $x^{(2)} = (t, t)$. Maximal steglängd blir 1 pga. bivillkor 1. Linjesökning skulle ge $t = 6.5$, så vi får $t = t^{max} = 1$ och $x^{(2)} = (1, 1)$.

Nu är bivillkor 1 aktivt. LP-problemet blir

min $z = -6d_1 - 5d_2$ då $d_1 + d_2 \leq 0$, samt $-1 \leq d \leq 1$,

vilket har optimallösning $d = (1, -1)$ med $z = -1$. Sätt $x^{(3)} = (1 + t, 1 - t)$. Maximal steglängd blir 1 pga. bivillkor 3. Linjesökning ger $t = 0.1$, så vi får $x^{(3)} = (1.1, 0.9)$.

Nu är bivillkor 1 aktivt. LP-problemet blir

min $z = -5.4d_1 - 5.4d_2$ då $d_1 + d_2 \leq 0$, samt $-1 \leq d \leq 1$,

vilket t.ex. har optimallösning $d = (0, 0)$ med $z = 0$. Alltså är $x = (1.1, 0.9)$ optimal. Svar: Tillsätt 1.1 rött och 0.9 gult.

Uppgift 5

5a: Handelsresandeproblemet. Närmaste-granne ger ingen tur, men man kan utöka delturen till en full rundtur och få 1-7-4-6-5-10-9-8-3-2-1, vilken kostar 74. Man kan även finna billigaste 1-träd, och flytta runt bågar för att få en tur, vilket kan ge 1-7-6-10-9-8-5-3-4-2-1, vilken också kostar 74.

En bra relaxation är 1-träd, med målfunktionsvärde 55.

Vi har alltså en tillåten lösning, som ger övre gräns på 75, samt en undre gräns på 55, så i värsta fall är vår lösning 20 dyrare än optimum.

5b: Kinesiska brevbärarproblemet. Noderna 1, 2, 8 och 9 har udda valens, och det billigaste sättet att höja dessa valenser är att dubblera bågarna (1,2) och (8,9). Kostnaden blir summan av alla bågkostnader (142) plus 9 = 151.

Uppgift 6

6a:
Inför slackvariabler x_5 och x_6. Starta med slackvariablerna i basen.

Bas	z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	$\hat{b}$
z	1	-3	-2	-4	-2	0	0	0
x_4	0	1	2	1	5	1	0	6
x_5	0	1	3	2	3	0	1	8

Först blir x_3 inkommande och x_6 utgående.

Bas	z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	$\hat{b}$
z	1	-1	4	0	4	0	2	16
x_4	0	1/2	1/2	0	7/2	1	-1/2	2
x_1	0	1/2	3/2	1	3/2	0	1/2	4

Nu blir x_1 inkommande och x_5 utgående.

Bas	z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	$\hat{b}$
z	1	0	5	0	11	2	1	20
x_4	0	1	1	0	7	2	-1	4
x_2	0	0	1	1	-2	-1	1	2

Därefter fås optimum. $x_1 = 4$, $x_2 = 0$, $x_3 = 2$, $x_4 = 0$, ($x_5 = 0$, $x_6 = 0$) och $z = 20$. Svar: Ta med 4 äpplen och 2 apelsiner, vilket ger smaken 20. Båda bivillkoren är aktiva.

6b: Skuggpriserna från uppgift a är $y_1 = 2$ och $y_2 = 1$, så båda ökningarna av högerleden skulle ge förbättring, men kolhydratvillkoret ger störst effekt.

6c: Ny variabel x_7: reducerad kostnad $\hat{c}_7 = c_7 - a_7^T y = 5 - 4 - 3 = -2 < 0$. Lösningen skulle alltså inte förbättras genom att ta med persikor.

6d: Vi har två bivillkor, vilket ger två basvariabler, dvs. (högst) två variabler blir större än noll. Vi får alltså aldrig mer än två fruktsorter i fruktsalladen. Ändring av koefficienter ändrar inte på detta.

6e: LP-dual:

$$
\begin{array}{llrcrcll}
\min & v = & 6y_1 & + & 8y_2 & & & \\
\text{då} & & y_1 & + & y_2 & \geq & 3 & (1) \\
& & 2y_1 & + & 3y_2 & \geq & 2 & (2) \\
& & y_1 & + & 2y_2 & \geq & 4 & (3) \\
& & 5y_1 & + & 3y_2 & \geq & 2 & (4) \\
& & y_1, & & y_2 & \geq & 0 &
\end{array}
$$

Optimal duallösning: $y_1 = 2$, $y_2 = 1$ från optimaltablån i uppgift a. Lösningen uppfyller alla duala bivillkor.

Komplementaritet:
Primala bivillkor 1 är aktivt och $y_1 > 0$.
Primala bivillkor 2 är aktivt och $y_2 > 0$.
Duala bivillkor 1 är aktivt och $x_1 > 0$.
Duala bivillkor 2 är inte aktivt och $x_2 = 0$.
Duala bivillkor 3 är aktivt och $x_3 > 0$.
Duala bivillkor 4 är inte aktivt och $x_4 = 0$.

Uppgift 7

7a: Den givna startlösningen är tillåten och ger basbågarna (1,2), (2,3), (4,3), (4,5), (4,6) och (7,4). Detta ger nodpriserna $y_1 = 0$, $y_2 = 7$, $y_3 = 14$, $y_4 = 5$, $y_5 = 13$, $y_6 = 9$, $y_7 = 0$, och följande reducerade kostnader: $\hat{c}_{14} = 0$ (optimalt), $\hat{c}_{17} = 6 > 0$ (optimalt ty $x = 0$), $\hat{c}_{24} = 6 > 0$ (optimalt ty $x = 0$), $\hat{c}_{35} = 7 > 0$ (optimalt ty $x = 0$), $\hat{c}_{56} = 10 > 0$ (optimalt ty $x = 0$), $\hat{c}_{67} = 15 > 0$ (optimalt ty $x = 0$). Alla bågar uppfyller optimalitetskriterierna, så lösningen är optimal.

7b: Nu fås $\hat{c}_{76} = -3 < 0$ (inte optimalt, öka). Detta ger x_{76} som inkommande variabel (att öka). Cykeln blir 7-6-4-7, ändringen blir en enhet, och utgående variabel blir x_{74}.

Nu har vi $y_1 = 0$, $y_2 = 7$, $y_3 = 14$, $y_4 = 5$, $y_5 = 13$, $y_6 = 9$, $y_7 = 3$, och följande reducerade kostnader: $\hat{c}_{14} = 0$ (optimalt), $\hat{c}_{17} = 3 > 0$ (optimalt ty $x = 0$), $\hat{c}_{24} = 6 > 0$ (optimalt ty $x = 0$), $\hat{c}_{35} = 7 > 0$ (optimalt ty $x = 0$), $\hat{c}_{56} = 10 > 0$ (optimalt ty $x = 0$), $\hat{c}_{74} = 3 > 0$ (optimalt ty $x = 0$). Alla bågar uppfyller optimalitetskriterierna, så lösningen är optimal.

7c: Utgå från lösningen ovan. $y_3 = 14$ och $y_5 = 13$, så $\hat{c}_{35} = 0 + 14 - 13 = 1 > 0$. Nej, det skulle inte sänka totalkostnaden.

7d: En vägsökning med Dijkstras metod ger bästa flödesökande väg 2-3-5-6-7, med kapacitet 6, skicka 6. Ändra tillåtna riktningar. Nästa vägsökning med Dijkstras metod ger att noderna 2, 3, 4, 5 och 6 kan märkas, men inte nod 1 och 7. Därför går minsnittet mellan å ena sidan noderna 1 och 7 och andra sidan 2, 3, 4, 5 och 6. Maxflöde: 6.

Uppgift 8

8a: Efter första steget fås $\alpha = (5, 6, 5, 4)$ och $\beta = (5, 0, 2, 5)$. Man kan stryka alla nollor genom att stryka rad 1 och 2 samt kolumn 2, med minsta ostrukna element 1, vilket gör att vi får $\alpha = (5, 6, 6, 5)$ och $\beta = (5, -1, 2, 5)$. Nu kan man stryka alla nollor genom att stryka rad 1 samt kolumn 1 och 2, med minsta ostrukna element 1, vilket gör att vi får $\alpha = (5, 7, 7, 6)$ och $\beta = (4, -2, 2, 5)$. Nu fås t.ex. lösningen $x_{14} = 1$, $x_{23} = 1$, $x_{32} = 1$, $x_{41} = 1$, dvs. kompis 1 kokar vegetarisk gryta, kompis 2 tillagar pastasallad, kompis 3 blandar grönsallad och kompis 4 fixar bröd. Total tid blir 34.

Optimal duallösning är $\alpha = (5, 7, 7, 6)$ och $\beta = (4, -2, 2, 5)$. Summering av duallösningen ger 34, så starka dualsatsen är uppfylld.

8b: En optimal duallösning fås genom att minska β_1 med 7 enheter, resten blir helt oförändrat. Den primala optimallösningen blir oförändrad. Alla tillåtna lösningar blir 7 billigare. (Om man löser om problemet, fås andra värden på duallösningen, men samma reducerade kostnader efter sista steget. Den duala lösning är aldrig unik.)