Tekniska Högskolan i Linköping
Matematiska Institutionen
Optimeringslära
Kaj Holmberg

Optimering för ingenjörer
Lösning till tentamen
2017-01-07

Lösningar

Uppgift 1

1a: Inför slackvariabler x_4, x_5 och x_6. Starta med slackvariablerna i basen.

Bas	z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	$\hat{b}$
z	1	-3	-4	-5	0	0	0	0
x_4	0	0	1	2	1	0	0	7
x_1	0	1	2	3	0	1	0	4
x_6	0	2	2	1	0	0	1	12

Först blir x_3 inkommande och x_5 utgående.

Bas	z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	$\hat{b}$
z	1	-4/3	-2/3	0	0	5/3	0	20/3
x_4	0	-2/3	-1/3	0	1	-2/3	0	13/3
x_1	0	1/3	2/3	1	0	1/3	0	4/3
x_6	0	5/3	4/3	0	0	-1/3	1	32/3

Nu blir x_1 inkommande och x_3 utgående.

Bas	z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	$\hat{b}$
z	1	0	2	4	0	3	0	12
x_4	0	0	1	2	1	0	0	7
x_1	0	1	2	3	0	1	0	4
x_6	0	0	-2	-5	0	-2	1	4

Denna tablå är optimal, så optimallösningen blir $x_1 = 4$, $x_2 = 0$, $x_3 = 0$, ($x_4 = 7$, $x_5 = 0$, $x_6 = 4$) med $z = 12$. Svar i ord: Gör 4 st kontorsstolar av sort 1. Det ger vinsten 12 kr. Det andra bivillkoret är aktivt, eftersom $x_5 = 0$.

1b: Duallösning utläst från optimaltablån i uppgift a: $y_1 = 0$, $y_2 = 3$, $y_3 = 0$. Stoppa in den i de duala bivillkoren och kolla. Stoppa in den och den primala lösningen i komplementaritetsvillkoren och kolla.

1c: Skuggpriserna (se uppgift b) ger att en ökning av högerledet i bivillkor 2 är det enda som ger förbättring, så skaffa mer av del 2.

1d: I optimaltablån är $\hat{c}_2 = -2$, så om c_2 ökas med två enheter är den på gränsen att bli inkommande, så svaret är $c_2 > 6$.

1e: Ny variabel x_7: reducerad kostnad $\hat{c}_7 = c_7 - a_7^T y = c_7 - y_1 - y_2 - y_3 = c_7 - 3 > 0$ om $c_7 > 3$.

Uppgift 2

2a: Efter första steget fås $\alpha = (8, 10, 8, 9, 10)$ och $\beta = (1, 6, 0, 7, 2)$. Man kan stryka alla nollor genom att stryka rad 2 och 5 samt kolumn 1 och 3, med minsta ostrukna element 1, vilket gör att vi får $\alpha = (9, 10, 9, 10, 10)$ och $\beta = (0, 6, -1, 7, 2)$. Nu fås lösningen $x_{14} = 1$, $x_{22} = 1$, $x_{33} = 1$, $x_{41} = 1$, $x_{55} = 1$, och total arbetstid blir 62.

Optimal duallösning är $\alpha = (9, 10, 9, 10, 10)$ och $\beta = (0, 6, -1, 7, 2)$. Summering av duallösningen ger 62, så starka dualsatsen är uppfylld.

4b: Efter första steget fås $\alpha = (0, 1, 0, 0, 0)$ och $\beta = (10, 15, 8, 16, 12)$, samt samma lösning som förut.

Ja, det går fortare. Att börja med den dimensionen där kostnaderna är mer lika ger större effekt (dvs. lägre reducerade kostnader), och därmed kanske snabbare flera nollor.

Uppgift 3

3a: Kinesiska brevbärarproblemet. Ta bort båge (3,4). (Man skulle kunna använda den för transport, men det är knappast aktuellt, eftersom båda noderna får jämn valens.) Nu får noderna 1, 2, 6 och 7 udda valens, och billigaste sättet att öka dessa är att dubblera bågarna (1,2) och (6,7). En optimal rundtur är t.ex. 1-2-3-5-4-6-7-1-5-7-6-2-1, vilket kostar 70+9=79. Turen är inte unik.

3b: Handelsresandeproblemet. Närmaste-granne ger turen 1-2-3-4-6-7-5-1, vilken kostar 38. (Genom att flytta en båge i billigaste 1-träd kan man få en tur som kostar 37.) En bra relaxation är billigaste 1-träd, vilket får kostnaden 35. Vi har alltså en tillåten lösning, som ger övre gräns på 38 (37), samt en undre gräns på 35, så i värsta fall är vår lösning 3 (2) dyrare än optimum.

Uppgift 4

4a: Den givna startlösningen är tillåten och ger basbågarna (1,7), (2,5), (3,4), (5,4), (6,4) och (7,6). Detta ger nodpriserna $y_1 = 0$, $y_2 = -4$, $y_3 = 5$, $y_4 = 14$, $y_5 = 5$, $y_6 = 11$, $y_7 = 5$, och följande reducerade kostnader: $\hat{c}_{12} = 7 > 0$ (optimalt ty $x = 0$), $\hat{c}_{15} = 2 > 0$ (optimalt ty $x = 0$), $\hat{c}_{23} = -4 < 0$ (optimalt ty $x = u$), $\hat{c}_{53} = 4 > 0$ (optimalt ty $x = 0$), $\hat{c}_{65} = 13 > 0$ (optimalt ty $x = 0$), $\hat{c}_{75} = 8 > 0$ (optimalt ty $x = 0$). Alla bågar uppfyller optimalitetskriterierna, så lösningen är optimal.

4b: Nu blir $\hat{c}_{15} = -1 < 0$, vilket inte är optimalt. Vi vill öka x_{15}, som blir inkommande variabel. Cykeln blir 1-5-4-6-7-1, och den största ändring som kan göras är 1 p.g.a. båge (6,4), så x_{64} blir utgående variabel.

Nodpriserna blir nu $y_1 = 0$, $y_2 = -5$, $y_3 = 4$, $y_4 = 13$, $y_5 = 4$, $y_6 = 11$, $y_7 = 5$, reducerade kostnaderna $\hat{c}_{12} = 8 > 0$ (optimalt ty $x = 0$), $\hat{c}_{23} = -4 < 0$ (optimalt ty $x = u$), $\hat{c}_{53} = 4 > 0$ (optimalt ty $x = 0$), $\hat{c}_{64} = 1 > 0$ (optimalt ty $x = 0$), $\hat{c}_{65} = 14 > 0$ (optimalt ty $x = 0$), $\hat{c}_{75} = 9 > 0$ (optimalt ty $x = 0$).

Alla bågar uppfyller nu optimalitetskriterierna, så lösningen är optimal.

4c: $\hat{c}_{37} = c_{37} + y_3 - y_7 = c_{37} - 1 < 0$ om $c_{73} < 1$.

4d: Börja med att lägga ut det angivna flödet på bågarna, och markera tillåtna riktningar. Sök sedan maximal flödesökande väg med Dijkstras metod. Vi får vägen 1-5-6-4, med kapacitet 3. Skicka 3 enheter och ändra tillåtna riktningar. I nästa iteration kan man i Dijkstras metod märka/nå alla noder utom 4, så minsnittet går runt nod 4, dvs. innehåller bågarna (3,4), (5,4) och (6,4). Maxflödet är 14.

4e: Använd Dijkstras metod, vilket ger följande nodpriser (som ju är proportionella mot tiden det tar): $y_1 = 0$, $y_2 = 3$, $y_3 = 8$, $y_4 = 14$, $y_5 = 7$, $y_6 = 11$, $y_7 = 5$. (Jag har använt data från uppgift a.)

Uppgift 5

P0: Grafisk lösning ger $x_1 = 8$, $x_2 = 1.33$ och $z = 26.67$, vilket ger $\bar{z} = 26$.
Förgrena över x_2: P1 = P0 + ($x_2 \leq 1$), P2 = P0 + ($x_2 \geq 2$).
P1: Grafisk lösning: $x_1 = 8$, $x_2 = 1$, $z = 26$, vilket ger $\underline{z} = 26$. Spara lösningen och kapa grenen.
P2 har $z \leq 26$ (från P0): Kapa grenen eftersom $z \leq \underline{z}$.

Trädet avsökt.

Bästa lösning $x_1 = 8$, $x_2 = 1$, med $z = 26$. Svar i ord: Lagra 8 backar i nod 1 och en i nod 2, vilket ger nyttan 26.

Uppgift 6

6a: Skriv problemet på standardform. $g_1(x) = x_1 + x_2 - 2 \leq 0$, $g_2(x) = -x_1 \leq 0$, $g_3(x) = -x_2 \leq 0$, $\nabla f(x) = \begin{pmatrix} 2x_1 - 4 \\ 2x_2 - 4 \end{pmatrix}$, $\nabla g_1(x) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\nabla g_2(x) = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\nabla g_3(x) = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$. (Det är lätt att se att problemet är konvext.)

För punkt (1, 1):
KKT1: Punkten är tillåten.
KKT2: Bivillkor 2 och 3 är inte aktiva, så $u_2 = 0$ och $u_3 = 0$.
KKT3: $\begin{pmatrix} -2 \\ -2 \end{pmatrix} + u_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. Detta ger $u_2 = 2$ och $u_3 = 2$, så $u \geq 0$ och KKT4 är uppfyllt. Punkten är alltså en KKT-punkt, och optimal (pga. konvexiteten).

6b: Nu blir $\nabla f(x) = \begin{pmatrix} 2x_1 - 4 \\ 4x_2 - 8 \end{pmatrix}$.

I startpunkten är bivillkor 2 och 3 aktiva. Första LP-problemet blir

min $z = -4d_1 - 8d_2$ då $d_1 \geq 0$, $d_2 \geq 0$, samt $-1 \leq d \leq 1$,

vilket har optimallösning $d = (1, 1)$ med $z = -12$. Sätt $x^{(2)} = (t, t)$. Maximal steglängd blir 1 pga. bivillkor 1. Linjesökning skulle ge $t = 2$, så vi får $t = t^{max} = 1$ och $x^{(2)} = (1, 1)$.

Nu är bivillkor 1 aktivt. LP-problemet blir

min $z = -2d_1 - 4d_2$ då $d_1 + d_2 \leq 0$, samt $-1 \leq d \leq 1$,

vilket har optimallösning $d = (-1, 1)$ med $z = -2$. Sätt $x^{(3)} = (1 - t, 1 + t)$. Maximal steglängd blir 1 pga. bivillkor 2. Linjesökning ger $t = 1/3$, så vi får $x^{(3)} = (2/3, 4/3)$.

Nu är bivillkor 1 aktivt. LP-problemet blir

min $z = -8/3d_1 - 8/3d_2$ då $d_1 + d_2 \leq 0$ samt $-1 \leq d \leq 1$,

vilket t.ex. har optimallösning $d = (0, 0)$ med $z = 0$. Alltså är $x = (2/3, 4/3)$ optimal.
Svar: Placera huset i punkten (0.67, 1.33).

6c: Pröva med att lägga till båda bivillkoren, där dock högst ett av dem får har multiplikator skild från noll.
$g_4(x) = x_1 - 1 \leq 0$, $g_5(x) = x_2 - 1 \leq 0$, $\nabla g_4(x) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\nabla g_5(x) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

För punkt (1, 1):
KKT1: Punkten är tillåten.
KKT2: Bivillkor 2 och 3 är inte aktiva, så $u_2 = 0$ och $u_3 = 0$.
KKT3: $\begin{pmatrix} -2 \\ -4 \end{pmatrix} + u_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + u_4 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + u_5 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. Detta ger $u_1 + u_4 = 2$ och $u_1 + u_5 = 4$.

Om vi sätter $u_4 = 0$, (dvs. inte tar med $x_1 \leq 1$) fås $u_1 = 2$ och $u_5 = 2$, så KKT4 är uppfyllt, och vi har en KKT-punkt.

Om vi sätter $u_5 = 0$, (dvs. inte tar med $x_2 \leq 1$) fås $u_1 = 4$ och $u_4 = -2$, så KKT4 är inte uppfyllt.

Slutsats: Lägga till bivillkor $x_2 \leq 1$ ger önskat resultat, medan $x_1 \leq 1$ inte gör det.