Tekniska Högskolan i Linköping
Matematiska Institutionen
Optimeringslära
Kaj Holmberg

Optimering för ingenjörer
Lösning till tentamen
2017-06-03

Lösningar

Uppgift 1

1a: Inför slackvariabler x_6, x_7 och x_8. Starta med slackvariablerna i basen.

Bas	z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	$\hat{b}$
z	1	-4	-3	-3	-1	-1	0	0	0	0
x_6	0	1	1	1	1	1	1	0	0	100
x_7	0	0	0	0	5	3	0	1	0	20
x_8	0	2	1	1	3	4	0	0	1	120

Först blir x_1 inkommande och x_8 utgående.

Bas	z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	$\hat{b}$
z	1	0	-1	-1	5	7	0	0	2	240
x_6	0	0	0.5	0.5	-0.5	-1	1	0	-0.5	40
x_7	0	0	0	0	5	3	0	1	0	20
x_1	0	1	0.5	0.5	1.5	2	0	0	0.5	60

Nu blir x_2 (eller x_3) inkommande och x_6 utgående.

Bas	z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	$\hat{b}$
z	1	0	0	0	4	5	2	0	1	320
x_2	0	0	1	1	-1	-2	2	0	-1	80
x_7	0	0	0	0	5	3	0	1	0	20
x_1	0	1	0	0	2	3	-1	0	1	20

Denna tablå är optimal, så optimallösningen blir $x_1 = 20$, $x_2 = 80$, $x_3 = 0$, $x_4 = 0$, $x_5 = 0$, ($x_6 = 0$, $x_7 = 20$, $x_8 = 0$) med $z = 320$. Svar i ord: Ta 20 gram vetekli och 80 gram havrekli, vilket ger fiberinnehåll 320. Det första och tredje bivillkoret är aktivt, eftersom slackvariablerna är noll. Man kan notera att sockerinnehållet blir noll, vilket jag personligen tycker är bra, men som andra skulle kunna ha invändningar mot.

1b: Å ena sidan är kolumnerna för x_2 och x_3 identiska, så de två variablerna kan aldrig vara basvariabler samtidigt (eftersom B då inte skulel gå att invertera), så det finns ingen baslösning, dvs. extremlösning, med båda. Å andra sidan har ickebasvariabeln x_3 reducerad kostnad noll, så man skulle kunna välja den som inkommande, och få en lösning med $x_3 = 80$ istället för $x_2 = 80$. En konvexkombinaiton av optimallösningar är också optimal, så man kan t.ex. ta hälften av varje, vilket ger $x_1 = 20$, $x_2 = 40$, $x_3 = 40$, $x_4 = 0$, $x_5 = 0$, med samma målfunktionsvärde.

1c: Duallösning utläst från optimaltablån i uppgift a: $y_1 = 2$, $y_2 = 0$, $y_3 = 1$. Stoppa in den i de duala bivillkoren och kolla. Stoppa in den och den primala lösningen i komplementaritetsvillkoren och kolla.

1d: Skuggpriserna (se uppgift b) ger att en ökning av högerledet i bivillkor 2 (socker) inte ger någon förbättring, medan en enhets ökning av högerledet i bivillkor 3 (fungicider) ger en enhets ökning av fiberinnehållet.

1e: Ny variabel x_9: reducerad kostnad $\hat{c}_9 = c_9 - a_9^T y = 2 - (y_1 + y_2 + y_3) = 2 - 3 = -1 < 0$, så ris skulle inte ge någon förbättring.

Uppgift 2

2a: Handelsresandeproblemet. Man kan t.ex. få turen 1-2-5-3-4-6-8-7-9-1, vilken kostar 45. En bra relaxation är billigaste 1-träd, vilket får kostnaden 41. Vi har alltså en tillåten lösning, som ger övre gräns på 45, samt en undre gräns på 41, så i värsta fall är vår lösning 4 dyrare än optimum.

2b: Kinesiska brevbärarproblemet. Noderna 2, 4, 7 och 9 har udda valens, och billigaste sättet att öka dessa är att dubblera bågarna (2,5), (4,5) och (7,9). En optimal rundtur är t.ex. 1-2-5-2-8-6-5-4-5-3-4-6-7-9-8-7-9-1, vilket kostar 72+16=88. Han kommer alltså att köra 16 på redan gensomsökta vägar.

2c: Då behöver han bara leta på de bågar han använde i uppgift a, och i en handelsresandetur har alla noder valens två, så rundturen blir densamma som handelsresandeturen, och han behöver inte åka på någon båge två gånger.

Uppgift 3

3a: Den givna startlösningen är tillåten och ger basbågarna (1,2), (2,5), (5,3), (5,4), (6,4), (8,6), (9,7) och (9,8). Detta ger nodpriserna $y_1 = 0$, $y_2 = 6$, $y_3 = 16$, $y_4 = 17$, $y_5 = 11$, $y_6 = 11$, $y_7 = 10$, $y_8 = 8$, $y_9 = 5$, och följande reducerade kostnader: $\hat{c}_{19} = 0$ (optimalt), $\hat{c}_{28} = 4 > 0$ (optimalt ty $x = 0$), $\hat{c}_{34} = 6 > 0$ (optimalt ty $x = 0$), $\hat{c}_{65} = 5 > 0$ (optimalt ty $x = 0$), $\hat{c}_{76} = 6 > 0$ (optimalt ty $x = 0$), $\hat{c}_{87} = 1 > 0$ (optimalt ty $x = 0$). Alla bågar uppfyller optimalitetskriterierna, så lösningen är optimal.

3b: Nu blir $\hat{c}_{19} = 1 > 0$, vilket inte är optimalt. Vi vill minska x_{19}, som blir inkommande variabel. Cykeln blir 9-1-2-5-4-6-8-9, och den största ändring som kan göras är 2 p.g.a. båge (1,2), så x_{12} blir utgående variabel.

Nodpriserna blir nu $y_1 = 0$, $y_2 = 7$, $y_3 = 17$, $y_4 = 18$, $y_5 = 12$, $y_6 = 12$, $y_7 = 11$, $y_8 = 9$, $y_9 = 6$, reducerade kostnaderna $\hat{c}_{12} = -1 < 0$ (optimalt ty $x = u$), $\hat{c}_{28} = 4 > 0$ (optimalt ty $x = 0$), $\hat{c}_{34} = 6 >$ (optimalt ty $x = 0$), $\hat{c}_{65} = 5 > 0$ (optimalt ty $x = 0$), $\hat{c}_{76} = 6 > 0$ (optimalt ty $x = 0$), $\hat{c}_{87} = 1 > 0$ (optimalt ty $x = 0$). Alla bågar uppfyller nu optimalitetskriterierna, så lösningen är optimal.

3c: $\hat{c}_{85} = c_{85} + y_8 - y_5 = c_{85} - 3 < 0$ om $c_{85} < 3$.

Uppgift 4

4a: Skriv problemet på standardform. $g_1(x) = x_1 + x_2 - 1 \leq 0$, $g_2(x) = -x_1 \leq 0$, $g_3(x) = -x_2 \leq 0$, $\nabla f(x) = \begin{pmatrix} 2x_1 - x_2 - 2 \\ 4x_2 - x_1 - 1 \end{pmatrix}$. $\nabla g_1(x) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\nabla g_2(x) = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\nabla g_3(x) = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$. (Hessianen av $f(x)$ är positivt definit, och bivillkoren är linjära, så problemet är konvext.)

I startpunkten är bivillkor 2 och 3 aktiva. Första LP-problemet blir

min $z = -2d_1 - d_2$ då $d_1 \geq 0$, $d_2 \geq 0$, samt $-1 \leq d \leq 1$,

vilket har optimallösning $d = (1, 1)$ med $z = -3$. Sätt $x^{(2)} = (t, t)$. Maximal steglängd blir 0.5 pga. bivillkor 1. Linjesökning skulle ge $t = 0.75$, så vi får $t = t^{max} = 0.5$ och $x^{(2)} = (0.5, 0.5)$.

Nu är bivillkor 1 aktivt. LP-problemet blir

min $z = -1.5d_1 + 0.5d_2$ då $d_1 + d_2 \leq 0$, samt $-1 \leq d \leq 1$,

vilket har optimallösning $d = (1, -1)$ med $z = -2$. Sätt $x^{(3)} = (0.5+t, 0.5-t)$. Maximal steglängd blir 0.5 pga. bivillkor 3. Linjesökning ger $t = 0.25$, så vi får $x^{(3)} = (0.75, 0.25)$.

Nu är bivillkor 1 aktivt. LP-problemet blir

min $z = -0.75d_1 - 0.75d_2$ då $d_1 + d_2 \leq 0$ samt $-1 \leq d \leq 1$,

vilket t.ex. har optimallösning $d = (0, 0)$ med $z = 0$. Alltså är $x = (0.75, 0.25)$ optimal. Svar: Ta med 0.75 av ingrediens 1 och 0.25 av ingrediens 2.

4b: Antagandet ger $u_2 = 0$. och $u_3 = 0$, vilket gör att KKT2 är uppfyllt. KKT3: $\begin{pmatrix} 2x_1 - x_2 - 2 \\ 4x_2 - x_1 - 1 \end{pmatrix} + u_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. Detta ger $2x_1 - x_2 + u_1 = 2$ och $-x_1 + 4x_2 + u_1 = 1$. Lös ut $x(u)$: $x_1 = (9 - 5u_1)/7$ och $x_2 = (4 - 3u_1)/7$.

KKT1: Antagandet $x_1 + x_2 = 1$ ger $(9 - 5u_1)/7 + (4 - 3u_1)/7 = 1$, dvs. $13 - 8u_1 = 7$, vilket ger $u_1 = 3/4$.

KKT4 är uppfyllt, ty $u_1 > 0$.

Sätt in u_1: $x_1 = 3/4$ och $x_2 = 1/4$.

KKT1 är uppfyllt, ty $x_1 \geq 0$ och $x_2 \geq 0$.

Nu är alla KKT-villkoret kontrollerade och uppfyllda, vilket betyder att våra antaganden stämmer och lösningen är optimal.

Uppgift 5

5a: Sök maximal flödesökande väg med Dijkstras metod. Vi får vägen 1-9-7-6-5-4, med kapacitet 4. Skicka 4 enheter och ändra tillåtna riktningar. Sök åter maximal flödesökande väg med Dijkstras metod. Vi får vägen 1-2-5-6-4, med kapacitet 3. Skicka 3 enheter och ändra tillåtna riktningar. I nästa iteration kan man i Dijkstras metod märka/nå alla noder utom 4, så minsnittet går runt nod 4, dvs. innehåller bågarna (5,4) och (6,4). Maxflödet är 7.

5b: Det kostar alltså 1 att gå genom en nod, men inget för att gå i en båge. Generell metod: Gör om nätverket genom att ersätta varje nod med två noder och en båge, så att alla inkommande bågar går till första noden och alla utgående bågar går från andra noden. Sätt kostnad 1 på dessa nya bågar och kostnad noll på alla andra bågar. Det betyder att gå genom en nod i ursprungliga nätverket är detsamma som att gå genom den nyinförda bågen i det modifierade nätverket.

Finn därefter billigaste väg från nod 1 till nod 4. Använd Dijkstras metod, vilket ger vägen 1-2a-2b-5a-5b-4, med kostnad 2.

Lite enklare: Antalet noder längs en väg (utan cykler) är en mindre än antalet bågar (om vi inte räknar med start och slutnod). Därför kan man lösa problemet genom att hitta en väg med minimalt antal bågar. Sätt kostnad ett på varje båge och finn kortaste väg.

Svar: Ta vägen 1-2-5-4, vilket ger två rangeringar.

Uppgift 6

Problemet blir

$\max 25x_1 + 40x_2$ då $2x_1 + 3x_2 \leq 10$, $x_1 \leq 4$, $x_2 \leq 3$, $x_1 \geq 0$, $x_2 \geq 0$, x_1, x_2 heltal.

P0: Grafisk lösning ger $x_1 = 0.5$, $x_2 = 3$ och $z = 132.5$, vilket ger $\bar{z} = 132$.
Förgrena över x_1: P1 = P0 + ($x_1 \leq 0$), P2 = P0 + ($x_1 \geq 1$).
P1: Grafisk lösning: $x_1 = 0$, $x_2 = 3$, $z = 120$, vilket ger $\underline{z} = 120$. Spara lösningen och kapa grenen.
P2: Grafisk lösning: $x_1 = 1$, $x_2 = 2.67$, $z = 131.67$, vilket ger $\bar{z} = 131$.
Förgrena över x_2: P3 = P2 + ($x_2 \leq 2$), P4 = P2 + ($x_2 \geq 3$).
P3: Grafisk lösning: $x_1 = 2$, $x_2 = 2$, $z = 130$, vilket ger $\underline{z} = 130$. Spara lösningen och kapa grenen.
P4: Saknar tillåten lösning. Kapa grenen.

Trädet avsökt. Bästa lösning $x_1 = 2$, $x_2 = 2$, med $z = 130$. Svar i ord: Köp 2 båtar av vardera sorten, vilket ger plats för 130 passagerare.

Uppgift 7

7a: Efter första steget fås $\alpha = (3, 4, 5, 4, 7)$ och $\beta = (3, 0, 0, 0, 3)$. Man kan stryka alla nollor genom att stryka rad 3 och 5 samt kolumn 2, med minsta ostrukna element 1, vilket gör att vi får $\alpha = (4, 5, 5, 5, 7)$ och $\beta = (3, -1, 0, 0, 3)$. Nu fås lösningen $x_{15} = 1$, $x_{24} = 1$, $x_{33} = 1$, $x_{42} = 1$, $x_{51} = 1$, och total arbetstid blir 31.

Optimal duallösning är $\alpha = (4, 5, 5, 5, 7)$ och $\beta = (3, -1, 0, 0, 3)$. Summering av duallösningen ger 31, så starka dualsatsen är uppfylld.

7b: Reducerad kostnad för position (2,1) är $\hat{c}_{21} = c_{21} - \alpha_2 - \beta_1$, vilket för optimal duallösning blir $\hat{c}_{21} = c_{21} - 5 - 3 = c_{21} - 8$, så för att få $\hat{c}_{21} < 0$, krävs $c_{21} < 8$, dvs. student 2 måste bli mer än 2 enheter snabbare för att få jobbet.